

**ELÉMENTS SINGULIERS PERMANENTS
DANS LA CLASSE DES ALGÈBRES BORNologiques
MULTIPLICATIVEMENT CONVEXES**

ABDELAZIZ TAJMOUATI & AHMED ZINEDINE

Abstract: Let \mathcal{M} be the class of all multiplicatively convex bornological algebras. Let A be in \mathcal{M} . We show that an element $x \in A \in \mathcal{M}$ is permanently singular in the class \mathcal{M} if and only if x is an m -bounding (Déf. 4). An m -bounding element is not necessarily a bounding element. This shows that the concept of \mathcal{M} -singularity is of relative character.

Keywords: m -convex bornological algebras, permanently singular elements, m -bounding elements.

1. Introduction

Dans [7], nous avons introduit la notion d'élément bornant dans l'ordre de caractériser les éléments singuliers permanents dans la classe \mathfrak{B} de toutes les algèbres bornologiques. Dans ce cadre, nous avons prouvé qu'un élément d'une algèbre bornologique est singulier permanent si, et seulement si, c'est un élément bornant. Or nous montrons ici qu'il existe une algèbre bornologique multiplicativement convexe qui contient des éléments singuliers permanents dans la classe \mathcal{M} , mais qui ne sont pas bornants (donc ils sont \mathfrak{B} -réguliers). Cette remarque signifie que la notion de la \mathcal{M} -singularité, contrairement à la \mathcal{C} -singularité, est de caractère relatif (Déf. 1). D'autre part, elle impose la recherche d'une caractérisation convenable de la \mathcal{M} -singularité.

Signalons qu'une situation analogue se présente dans le cas topologique: il existe des éléments d'une algèbre topologique m -convexe A qui sont singuliers permanents dans la classe des algèbres m -convexes mais qui sont inversibles dans des extensions localement convexes de A (Voir par exemple [8], où on a prouvé qu'un élément de A est singulier permanent dans la classe des algèbres m -convexes si, et seulement si, il est un diviseur topologique de zéro (m -d.t.z). La notion de m -d.t.z, introduite par Michael dans [6] sans utiliser ce terme, est une version un peu faible de d.t.z mieux adaptée aux algèbres m -convexes.

Dans ce travail, nous introduisons une notion d'élément m -bornant et nous montrons qu'un élément d'une a.b.m.c est singulier permanent si, et seulement si, il est m -bornant.

2. Préliminaires

Toutes les algèbres considérées dans la suite sont des algèbres commutatives et unitaires sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

— Soit E un espace vectoriel. Une bornologie sur E est dite vectorielle si, la somme de deux borné, l'image d'un borné par une homothétie, et l'enveloppe équilibrée d'un borné est un borné. Si, en plus, l'enveloppe convexe d'un borné est un borné alors la bornologie est dite convexe.

— Une algèbre A est dite bornologique s'elle est munie d'une bornologie vectorielle séparée rendant la multiplication bornée. On note \mathfrak{B} la classe de toutes les algèbres bornologiques.

— Soit $A \in \mathfrak{B}$. Si la bornologie de A est convexe, alors A possède une base de bornologie formée de disques (i.e. d'ensembles convexes et équilibrés à la fois). On dit alors que A est une algèbre bornologique convexe (a.b.c). On note \mathcal{C} la classe de toutes les algèbres convexes.

— Soit $A \in \mathcal{C}$. Un disque B de A est dit complétant si le sous-espace vectoriel A_B de A engendré par B et semi-normé par sa jauge P_B est un espace de Banach. On dit que A est complète s'elle possède une base de bornologie formée de disques complétants.

— Soient A et A' deux algèbres bornologiques. Une application f de A dans A' est dite un isomorphisme bornologique s'elle est bijective, bornée et f^{-1} est aussi bornée.

— Soient \mathcal{K} une classe d'algèbres bornologiques ($\mathcal{K} \subset \mathfrak{B}$) et $A \in \mathcal{K}$. On dit qu'une algèbre bornologique A' est une \mathcal{K} -extension bornologique de A si $A' \in \mathcal{K}$ et s'il existe un isomorphisme bornologique f de A dans une sous-algèbre unitaire de A' tel que $f(e) = e'$ (où e et e' sont les éléments unités de A et A' respectivement).

— Un élément $x \in A$ est dit \mathcal{K} -régulier s'il existe une \mathcal{K} -extension bornologique de A dans laquelle x est inversible. Dans le cas contraire, il est dit \mathcal{K} -singulier ou singulier permanent dans \mathcal{K} .

Définition 1. Soit \mathcal{K} une sous classe de \mathfrak{B} . On dit que la singularité permanente dans \mathcal{K} est de caractère absolu si, pour toute algèbre A de \mathcal{K} , un élément $x \in A$ est \mathcal{K} -singulier si, et seulement si, il est \mathfrak{B} -singulier. Dans le cas contraire elle est dite de caractère relatif.

Rappelons que dans le cas topologique on a les résultats suivants:

— La singularité permanente dans la classe des algèbres de Banach est de caractère absolu (car dans ce cas, un élément est singulier permanent si, et seulement si, il est d.t.z (voir [3])).

— La singularité permanente dans la classe des algèbres m -convexes est de caractère relatif (dans ce cas, un élément est singulier permanent si, et seulement si, il est m -d.t.z [8]). Les m -d.t.z sont introduits pour la première fois par Michael dans [6] mais sans utiliser ce terme. Ils ne sont pas équivalents au d.t.z (voir [5]).

— A propos de la singularité permanente dans la classe des algèbres localement convexes, on ne sait pas encore s'il est de caractère absolu ou relatif [9].

3. Algèbres bornologiques multiplicativement convexes

Soit A une algèbre commutative unitaire. Une partie P de A est dite idempotente si $P.P \subset P$. Si P est idempotente alors l'enveloppe disquée $\Gamma(P)$ de P (i.e. le plus petit disque contenant P) et $P \cup \{e\}$ sont idempotentes. Si P et Q sont idempotentes contenant e alors $\Gamma(P \cup Q)$ est idempotente [4].

Définition 2. Soit A une algèbre bornologique. A est dite multiplicativement convexe (a.b.m.c) si A admet une base de bornologie formée de disques idempotents.

Un système inductif bornologique est un système inductif (A_i, π_{ji}) d'algèbres bornologiques tel que les π_{ji} soient bornés. La limite inductive bornologique de ce système est l'algèbre $A = \varinjlim (A_i, \pi_{ji})$ munie de la bornologie limite inductive. Une partie B de A est alors bornée si, et seulement si, il existe un indice i et un borné B_i de A_i tel que $B = \pi_i(B_i)$. Les π_i étant les applications canoniques de A_i dans A associées au système inductif.

Une sous-famille $(A_{i'})_{i'}$ de $(A_i)_i$ est dite cofinale avec cette dernière si pour tout indice i , il existe un indice i' tel que $i \leq i'$. Dans ce cas on a $A = \varinjlim (A_i, \pi_{ji}) = \varinjlim (A_{i'}, \pi_{j'i'})$.

Soit A une a.b.m.c. On considère une base $(B_i)_i$ de bornologie formée de disques bornés idempotents contenant e . On la munit de l'ordre ($i \leq j$ si, et seulement si, $B_i \subset B_j$). C'est un ordre filtrant à droite. Soit (A_{B_i}, P_{B_i}) le sous-espace engendré par B_i et normé par la jauge P_{B_i} de B_i . Soit $\pi_{ji} : A_{B_i} \rightarrow A_{B_j}$ l'injection canonique. Alors (A_{B_i}, π_{ji}) est un système inductif bornologique et on a $A = \varinjlim (A_{B_i}, \pi_{ji})$.

Inversement si A est limite inductive bornologique d'espaces normés il est facile de voir qu'elle est une a.b.m.c, d'où:

Théorème 1. ([1],[4]) Une algèbre bornologique A est une a.b.m.c (resp. a.b.m.c complète) si, et seulement si, elle est limite inductive bornologique d'algèbres normées (resp. de Banach).

Les a.b.m.c complètes fournissent une généralisation naturelle des algèbres de Banach. Elles possèdent des propriétés spectrales analogues à celles de ces dernières. Nous avons les résultats suivants:

Proposition 1. ([1],[4]) Soient $A = \varinjlim(A_i, \pi_{ji})$ une a.b.m.c et $x \in A$. Alors x est inversible dans A si, et seulement si, x est inversible dans un A_i convenable.

Proposition 2. ([1],[4]) Le spectre de tout élément d'une a.b.m.c complexe complète est non vide.

Proposition 3. Toute a.b.m.c A est contenue (algébriquement!) dans une a.b.m.c complète.

Preuve. Soit (A_i, π_{ji}) un système inductif bornologique d'algèbres normées tel que $A = \varinjlim(A_i, \pi_{ji})$. Soit \tilde{A}_i la complétée de A_i . Alors il existe des homomorphismes d'algèbres $\tilde{\pi}_{ji} : \tilde{A}_i \rightarrow \tilde{A}_j$ qui prolongent continûment les π_{ji} . On obtient un système inductif bornologique d'algèbres de Banach. Soit $\tilde{A} = \varinjlim(\tilde{A}_i, \tilde{\pi}_{ji})$. Alors A est une sous algèbre de \tilde{A} . ■

Nous utiliserons ce résultat pour démontrer le théorème suivant qu'on a donné dans [4] mais avec la condition de la complétude de l'algèbre considérée.

Théorème 2. Soit A une a.b.m.c de division sur \mathbb{C} (non nécessairement complète!). Alors A est isomorphe à \mathbb{C} .

Preuve. Soit A une a.b.m.c de division. A est contenue dans une a.b.m.c complète d'après la proposition ci-dessus. Si $x \in A$ alors le spectre de x dans \tilde{A} est non vide, d'où l'existence d'un $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda e - x$ est non inversible dans \tilde{A} . Mais $\lambda e - x \in A$. Donc $\lambda e - x = 0$ et alors $x = \lambda e$. ■

Théorème 3. Soit A une Q -algèbre commutative de Fréchet. Alors A , munie de sa bornologie de von-Neumann, est une a.b.m.c.

Preuve. C'est une conséquence du théorème II. 4. 15, p. 170 de [1]. ■

4. Caractère relatif de la \mathcal{M} -singularité

Définition 3. ([7]) Soient A une algèbre bornologique et $x \in A$. On dit que x est un élément bornant s'il existe une partie non bornée D de A telle que xD est borné.

Nous avons montré dans [7] que la notion d'élément bornant coïncide avec celle de diviseur topologique de zéro dans le cas où l'algèbre considérée est une algèbre topologique métrisable. Puis nous avons montré le théorème suivant:

Théorème 4. Soient A une algèbre bornologique et $x \in A$. Alors x est \mathfrak{B} -singulier si, et seulement si, x est un élément bornant de A .

Donc si $x \in \mathfrak{B}$ n'est pas bornant, il existe une extension bornologique de A dans la quelle x est inversible. Comme nous l'avons remarqué dans [7], cette

extension peut être choisie convexe si A l'est. On conclut donc que si A est convexe et $x \in A$ alors x est \mathcal{C} -singulier si, et seulement si, x est \mathfrak{B} -singulier. C'est à dire que la notion de la \mathcal{C} -singularité est de caractère absolu.

Si on remplace la classe \mathcal{C} par la classe \mathcal{M} le résultat ne reste pas vrai: la \mathcal{M} -singularité est de caractère relatif. L'exemple suivant le montre:

Exemple. Soit A l'algèbre de toutes les suites de \mathbb{C} . On munit A de la multiplication de Cauchy et de la topologie définie par la famille des semi-normes suivantes:

$$\|(x_i)_i\|_n = \sum_{i=0}^n |x_i| \quad (n \in \mathbb{N})$$

A est alors une \mathcal{Q} -algèbre multiplicativement convexe métrisable complète qui ne possède aucun diviseur topologique de zéro [5]. Du fait que les éléments bornants sont exactement les diviseurs topologiques de zéro dans les algèbres topologiques métrisables on conclut que A , en tant qu'algèbre bornologique munie de sa bornologie de Von Neumann, est une a.b.m.c (Théorème 3) qui ne possède aucun élément bornant. D'où tous les éléments de A sont \mathfrak{B} -réguliers.

D'autre part un élément $Y = (y_0, y_1, \dots)$ est inversible dans A si, et seulement si, $y_0 \neq 0$. Si $X = (0, \dots, 0, y_0, y_1, \dots)$ est un élément de A tel que $y_0 \neq 0$, alors on vérifie facilement qu'on peut l'écrire sous la forme $Z^p Y$ où $Y = (y_0, y_1, \dots)$ est inversible dans A , p est le nombre des zéro avant y_0 et Z est l'élément $(0, 1, 0, \dots)$ de A .

Supposons qu'il existe une \mathcal{M} -extension A' de A dans laquelle Z est inversible. Soit B' la sous algèbre de A' engendrée par A et Z^{-1} . Alors B' est de division. En effet:

i) Si $X \in A$ alors $X = Z^p Y$ avec $p \in \mathbb{N}$ et Y un élément inversible de A . On en déduit que X est inversible dans B' avec $X^{-1} = Z^{-p} Y^{-1}$.

ii) Si $X \in B'$, il s'écrit sous la forme $X = Z^{-i_1} X_1 + Z^{-i_2} X_2 + \dots + Z^{-i_n} X_n$ avec les i_j sont des entiers naturels et les X_i sont des éléments de A . Donc il existe un entier naturel p ($p = \max_{1 \leq j \leq n} i_j$) tel que $Z^p X \in A$. D'où d'après i) $Z^p X$, et par conséquent, X est inversible dans B' .

On conclut donc que B' est une a.b.m.c de division ce qui implique, par application du théorème 2 que B' est isomorphe à \mathbb{C} , ce qui est absurde car B' contient A .

Ainsi Z ne peut être inversible dans aucune \mathcal{M} -extension de A bien qu'il est \mathfrak{B} -régulier. Ce résultat nous permet de conclure que, contrairement à la \mathcal{C} -singularité, la notion de la \mathcal{M} -singularité est de caractère relatif.

5. Caractérisation des éléments singuliers permanents dans la classe des a.b.m.c

Nous cherchons dans cette section à caractériser les éléments \mathcal{M} -singuliers d'une a.b.m.c. Comme le montre l'exemple de la section précédente, l'hypothèse "non bornant" n'est pas suffisant pour qu'un élément d'une a.b.m.c soit \mathcal{M} -régulier.

Définition 4. Soit $A = \varinjlim (A_{B_i}, \pi_{ji})$ une a.b.m.c. où $(B_i)_i$ est la famille de tous les disques idempotents bornés contenant e . On dit qu'un élément x de A est m-bornant s'il existe un indice i_0 , tel que x est bornant dans tout A_{B_j} tel que $i_0 \leq j$ (i.e. tel que $B_{i_0} \subset B_j$).

Exemple. Un diviseur de zéro x dans une a.b.m.c est un m-bornant.

En effet, Soit y un élément non nul de A tel que $xy = 0$. Il existe un B_i qui contient à la fois x et y . Alors x est un diviseur de zéro (donc bornant) dans tout A_{B_j} tel que $i \leq j$.

Pour montrer le théorème principal de ce papier, nous avons besoin de quelques résultats auxiliaires:

Soient A une a.b.m.c et a un élément de A qui n'est pas m-bornant. On peut écrire A sous la forme $A = \varinjlim (A_i, \pi_{ji})$ (limite inductive bornologique) avec:

- 1) A_i est une sous algèbre unitaire normée de norme $\| \cdot \|_i$.
- 2) Si $i \leq j$ alors $A_i \subset A_j$ et $\|x\|_j \leq \|x\|_i$ pour tout x dans A_i .
- 3) Pour tout indice i , a n'est pas bornant dans A_i .

En effet, on peut prendre la famille de tous les (A_B, P_B) où B est un disque idempotent borné contenant e et tel que a n'est pas bornant dans A_B .

Soit $A_i[X]$ l'algèbre de tous les polynômes à une indéterminée à coefficients dans A_i . Munissons $A_i[X]$ de la norme $\| \cdot \|_i$ définie par:

$$\left\| \sum_{k=0}^p a_k X^k \right\|_i = \sum_{k=0}^p \|a_k\|_i$$

Considérons maintenant l'algèbre quotient $\widetilde{A}_i = A_i[X]/\overline{(e - aX)A_i[X]}$ munie de la norme quotient:

$$\begin{aligned} \|\widetilde{P(X)}\|_i &= \inf \left\{ \|P(X) + Q(X)\|_i, Q(X) \in \overline{(e - aX)A_i[X]} \right\} \\ &= \inf \left\{ \|P(X) + Q(X)\|_i, Q(X) \in (e - aX)A_i[X] \right\} \end{aligned}$$

$\overline{(e - aX)A_i[X]}$ étant la fermeture topologique de $(e - aX)A_i[X]$ dans $A_i[X]$ et $\widetilde{P(X)}$ la classe d'équivalence de $P(X)$.

D'après [3], $(\widetilde{A}_i, \| \cdot \|_i)$ est une extension normée de $(A_i, \| \cdot \|_i)$ (En particulier, \widetilde{A}_i est une extension bornologique de A_i) dans laquelle a est inversible (d'inverse \widetilde{X}).

Remarque 1. L'extension construite dans [3] utilise l'algèbre des séries formelles au lieu de l'algèbre des polynômes en vue d'obtenir la complétude de laquelle nous n'avons pas besoin ici.

Lemme 1. Pour tout indice k , l'application Ψ_k de \widetilde{A}_k dans $A[X]/(e - aX)A[X]$ donnée par:

$$\Psi_k(P(X) + \overline{(e - aX)A_k[X]}) = P(X) + (e - aX)A[X]$$

est un homomorphisme injectif d'algèbres unitaires.

Preuve. Ψ_k est évidemment un homomorphisme d'algèbres unitaire. Il reste à montrer qu'il est injectif. Soit donc $P(X) \in A_k[X]$ avec $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ où les a_i sont des éléments de A_k . Supposons que $\Psi_k(\widetilde{P(X)}) = 0$. Ça signifie que $P(X) = (e - aX) \sum_{i=0}^{+\infty} b_i X^i$ où les b_i sont des éléments de A nuls sauf pour un nombre fini d'indices. On aura alors $a_0 = b_0$ et $a_i = b_i - ab_{i-1}$. Par récurrence on montre que tous les b_i sont dans A_k et par suite $P(X) \in (e - aX)A_k[X]$ c'est à dire $\widetilde{P(X)} = 0$. D'où Ψ_k est injectif. ■

En vertu de ce lemme, $\widetilde{A_k}$ est isomorphe à la sous-algèbre $A'_k = \Psi_k(\widetilde{A_k})$ de $A[X]/(e - aX)A[X]$. De plus si on munit A'_k de la norme $\| \cdot \|'_k$ définie pour tout $\widetilde{P(X)}$ dans $\widetilde{A_k}$ par:

$$\|\Psi_k(\widetilde{P(X)})\|'_k = \|\widetilde{P(X)}\|_k$$

Cet isomorphisme devient, en fait, une isométrie.

On conclut alors que pour tout indice i , il existe une sous-algèbre A'_i de $A[X]/(e - aX)A[X]$ qui est une extension bornologique de A_i et dans laquelle a est inversible.

Lemme 2. Pour deux indices i et j tels que $i \leq j$, on note: $\pi'_{ji} : A'_i \longrightarrow A'_j$ où:

$$\pi'_{ji}(\Psi_i(P(X) + (e - aX)A_i[X])) = \Psi_j(P(X) + (e - aX)A_j[X])$$

Alors les π'_{ji} sont des homomorphismes d'algèbres unitaires et ils sont bornés.

Preuve. Les π'_{ji} sont bien définis et sont des homomorphismes d'algèbres unitaires. Il reste à montrer qu'ils sont bornés. Soit $P(X) \in A_i[X]$. En tenant compte du fait que $(e - aX)A_i[X] \subset (e - aX)A_j[X]$ et que $| \cdot |_j \leq | \cdot |_i$ sur $A_i[X]$ on obtient:

$$\begin{aligned} & \|\pi'_{ji}(\Psi_i(P(X) + \overline{(e - aX)A_i[X]}))\|'_j \\ &= \|\Psi_j(P(X) + \overline{(e - aX)A_j[X]})\|'_j \\ &= \|\|P(X) + \overline{(e - aX)A_j[X]}\|_j\|_j \\ &= \inf \left\{ |P(X) + Q(X)|_j, Q \in \overline{(e - aX)A_j[X]} \right\} \\ &\leq \inf \left\{ |P(X) + Q(X)|_j, Q \in (e - aX)A_j[X] \right\} \\ &\leq \inf \left\{ |P(X) + Q(X)|_i, Q \in (e - aX)A_i[X] \right\} \\ &= \inf \left\{ |P(X) + Q(X)|_i, Q \in \overline{(e - aX)A_i[X]} \right\} \\ &= \|\|P(X) + \overline{(e - aX)A_i[X]}\|_i\|_i \\ &= \|\Psi_i(P(X) + (e - aX)A_i[X])\|'_i \end{aligned}$$

Donc π'_{ji} est continu et par suite il est borné. ■

A partir du système inductif bornologique (A_i, π_{ji}) on a construit un système inductif bornologique (A'_i, π'_{ji}) . Soit $A' = \varinjlim(A'_i, \pi'_{ji})$ la limite inductive bornologique de ce système.

Lemme 3. A' est une extension bornologique de A dans laquelle a est inversible.

Preuve. Soit Ψ l'application de A dans A' donnée pour tout b de A par:

$$\Psi(b) = b + (e - aX)A[X]$$

($b + (e - aX)A[X] = \Psi_i(b + \overline{(e - aX)A_i[X]})$ pour tout A_i contenant b). Alors Ψ est injective car, si $\Psi(b) = 0$ on obtient $b \in (e - aX)A[X]$, d'où $b = (e - aX)(\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k)$ où les a_k sont des éléments de A nuls sauf pour un nombre fini d'indices. On aura $a_0 = b$ et pour tout $k \geq 1$, $a_k - aa_{k-1} = 0$. Par récurrence on trouve que $a_k = a^k b$ pour tout $k \geq 1$. Mais, puisque les a_k non nuls sont en nombre fini, on conclut que $a^k b = 0$ à partir d'un certain rang. Ceci implique que $b = 0$ car a n'est pas un diviseur de zéro. Donc Ψ est injective et par suite A' est une extension algébrique de A dans laquelle a est inversible.

Pour achever la démonstration, il reste à montrer que la bornologie induite sur A par celle de A' coïncide avec la bornologie initiale de A . Si B est un borné de A alors il est borné dans un certain A_i donc dans A'_i et par suite il est borné dans A' . De même si B' est un borné de A' alors il est borné dans un certain A'_i donc $B' \cap A$ est un borné de A_i (car A'_i est une extension bornologique de A_i), et par suite il est un borné de A . ■

Théorème 5. Soient A une a.b.m.c et a un élément de A . Alors a est \mathcal{M} -singulier si, et seulement si, a est un élément m -bornant de A .

Preuve. Supposons que a est un élément m -bornant. Ecrivons $A = \varinjlim(A_{B_i}, \pi_{B_i B_j})$ comme dans la définition 5.7. Alors il existe un disque borné idempotent B_0 tel que a est bornant dans A_B pour tout B contenant B_0 . Si a est inversible dans une \mathcal{M} -extension $A' = \varinjlim(A'_{B'_k}, \pi'_{B'_k B'_l})$ de A alors il existe un disque borné idempotent B' de A' vérifiant:

- i) a est inversible dans $A'_{B'}$.
- ii) $B_0 \subset B' \cap A$.

En effet: x inversible dans A' implique qu'il est inversible dans un certain $A'_{B'_1}$. Posons $B' = \Gamma(B_0 \cup B'_1)$. C'est un disque idempotent borné de A' qui vérifie i) et ii).

On vérifie que $(A'_{B'}, P_{B'})$ est une extension bornologique de $(A_{B' \cap A}, P_{B' \cap A})$ dans laquelle a est inversible (d'après i) donc a n'est pas bornant dans $A_{B' \cap A}$. Mais, en tenant compte de ii), ceci est contradictoire avec l'hypothèse. On conclut donc que a est \mathcal{M} -singulier.

Réciproquement, si a n'est pas un élément m -bornant de A alors les lemmes 1, 2 et 3 montrent que a est inversible dans une certaine \mathcal{M} -extension A' de A , c'est-à-dire, a est \mathcal{M} -régulier. ■

Définition 5. ([1],[2],[3]) Soit A une a.b.c. Un élément x de A est dit régulier (ou borné suivant certains auteurs) si $\{x\}$ est absorbé par un disque borné idempotent de A .

L'ensemble A_0 de tous les éléments réguliers de A est une sous-algèbre de A . On la munit de la bornologie définie par la famille de tous les disques idempotents bornés et on obtient une a.b.m.c qu'on appelle l'a.b.m.c canonique associée à A .

Proposition 4. Soient A une a.b.m.c et a un élément \mathfrak{B} -régulier, dire que a est inversible dans une \mathcal{M} -extension de A c'est exactement dire que a admet un inverse régulier (i.e. borné) dans une \mathfrak{B} -extension de A .

Preuve. Si a est inversible dans une \mathcal{M} -extension A' de A alors a^{-1} est évidemment absorbé par un certain disque borné idempotent de A' donc il est régulier.

Si a admet un inverse a^{-1} régulier dans une extension bornologique A' de A (non nécessairement a.b.m.c) alors on considère l'a.b.m.c canonique A'_0 de A' . C'est une \mathcal{M} -extension de A et de plus elle contient a^{-1} . Donc a est \mathcal{M} -régulier. ■

Dans [7] nous avons montré que si a et b sont deux éléments non bornants d'une algèbre bornologique alors leur produit est aussi non bornant. Maintenant si $A = \varinjlim (A_{B_i}, \pi_{ji})$ est une a.b.m.c, la bornologie de A_{B_i} n'est pas forcément celle induite par A_{B_j} ($i \leq j$). De ce fait, il n'y a pas de rapport évident entre les éléments bornants de A_{B_i} et ceux de A_{B_j} . Donc on ne sait pas si ab est m-bornant ou non lorsque a et b ne sont pas m-bornants. D'où le problème suivant:

Problème. Le produit de deux éléments \mathcal{M} -réguliers d'une a.b.m.c est-il \mathcal{M} -régulier?

References

- [1] M. Akkar, *Etude spectrale et structures d'algèbres topologiques et bornologiques complètes*, Thèse sc. Math., Université Bordeaux I (1976).
- [2] G.R. Allan, *A spectral theory for locally convex algebras*, Proc. London Math. Soc. (3) **15** (1965), 399–421.
- [3] R. Arens, *Inverse producing extensions of normed algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **88** (1958), 536–548.
- [4] H. Hogbé-Nlend, *Les fondements de la théorie spectrale des algèbres bornologiques*, Bol. Soc. Brazil. Mat. **3** (1972), 19–56.
- [5] M.E. Kuczma, *On a problem of E. Michael concerning topological divisors of zero*, Coll. Math. **19** (1968), 295–299.
- [6] E. Michael, *Locally multiplicatively convex topological algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. **11** (1952).
- [7] A. Tajmouati et A. Zinedine, *Eléments singuliers permanents dans la classe des algèbres bornologiques*, Functiones et Approximatio **27** (1999), 31–38.

- [8] W. Żelazko, *On permanently singular elements in commutative m -convex locally convex algebras*, *Studia Math.* **37** (1971), 181–190.
- [9] W. Żelazko, *Concerning a characterization of permanently singular elements in commutative locally convex algebras*, *Math. Structures-computational mathematics-mathematical modeling* **2**, Sofia (1984), 326–333.

Address: Département de mathématiques et informatique, Université S.M. Ben Abdellah
Faculté des sciences Dhar-Mehraz, B.P. 1796 Fès-Atlas, Fès (Maroc).

E-mail: atajmouati@yahoo.fr

Received: 8 November 2001