Functiones et Approximatio
XXIX (2001), 89–97

CONVEXIFIÉE D'UNE TOPOLOGIE D'ALGÈBRE $A-P$-NORMÉE

A. El Kinani & M. Chahboun

Abstract: We show that the convexified topology of a locally bounded algebra can be determined by an explicit A-semi-norm. We also exhibit relationship between some properties of A-p-normed algebras and the associated A-semi-normed algebras obtained by convexification.

Keywords: A-p-norme, algèbre A-p-normée, Q-algèbre, algèbre advertiblement complète, convexifiée d'une topologie.

1. Introduction

Dans [1], nous avons étudié les algèbres A-p-normées, $0 < p \leq 1$. Ce sont exactement les algèbres localement bornées non nécessairement complètes. Pour $0 < p < 1$, ces algèbres ne sont pas, en général, localement convexes ([1]). Par ailleurs, dans un espace vectoriel topologique quelconque (E, τ), on peut toujours considérer la topologie, notée $\widehat{\tau}$, dite convexifiée de τ. L'existence et des propriétés de $\widehat{\tau}$ sont étudiées dans [3]. Dans le cas particulier d'un espace p-normé, la topologie $\widehat{\tau}$ peut être définie par la jauge, notée $\|.\|_c$, de l'enveloppe convexe de la boule unité. Dans ce travail, nous ne considérons que les algèbres A-p-normées, $0 < p \leq 1$. Nous commençons par déterminer la convexifiée dans de nombreux exemples. Nous passons ensuite à l'étude de la semi-norme $\|.\|_c$ dans une algèbre A-p-normée $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$. Ainsi nous montrons que $\|.\|_c$ est une A-semi-norme donnée par $\|x\|_c = \inf \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_p^{\frac{1}{p}}$, où l'inf est pris sur toutes les décompositions $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $x_i \in E$. Nous prouvons que $(E, \|.\|_c)$ est une algèbre A-normée si, et seulement si, le dual topologique E', de $(E, \|.\|_p)$, sépare les points de E. Si $(E, \|.\|_p)$ est une Q-algèbre commutative, nous montrons que $(E, \|.\|_c)$ est aussi une Q-algèbre. De plus, dans le cas non nécessairement commutatif, nous établissons que $\varrho(x) = \overline{\lim_n} \|x^n\|_c^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim_n} \|x^n\|_p^{\frac{1}{np}}$, pour tout $x \in E$. Nous nous intéressons ensuite à des algèbres A-p-normées advertiblement complètes. Dans ce cas, on a $\max\{\chi(x) : \chi \in M(E, \|.\|_p)\} \leq \overline{\lim_n} \|x^n\|_c^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim_n} \|x^n\|_p^{\frac{1}{np}} \leq \varrho(x)$,

---

2000 **Mathematics Subject Classification:** Primary: 46A16. Secondary: 46H99.

pour tout $x \in E$, où $M(E, \|.\|_p)$ désigne l'espace des caractères non nuls continus sur $(E, \|.\|_p)$. Enfin, dans une algèbre A-p-normée advertiblement complète, nous montrons qu'il existe toujours une semi-norme d'algèbre $\|.\|$, plus fine que $\|.\|_c$ et telle que $(E, \|.\|)$ soit une Q-algèbre

2. Preliminaires

Soient E une algèbre complexe et $\|.\|_p$, $0 < p \leq 1$, une p-norme (resp. p-semi-norme) d'espace vectoriel sur E. On dit que $\|.\|_p$ est une A-p-norme (resp. A- p- semi-norme) si, pour tout $x \in E$, il existe $M(x) > 0$ et $N(x) > 0$ telles que $\|xy\|_p \leq M(x)\|y\|_p$ et $\|yx\|_p \leq N(x)\|y\|_p$, pour tout $y \in E$. Si $\|.\|_p$ est une A- p-norme (resp. A- p- semi-norme), on dit que $(E, \|.\|_p)$ est une algèbre A- p-normée (resp. A- p- semi-normée). Rappelons qu'une algèbre est dite p-normée (resp. p-semi-normée) si elle est munie d'une p-norme (resp. p-semi-norme) d'espace vectoriel telle que $\|xy\|_p \leq \|x\|_p \|y\|_p$, pour tous $x, y \in E$. Signalons que les algèbres p-normées considérées ici ne sont pas nécessairement complètes comme c'est le cas dans [7] et [8] . Une algèbre p-normée complète sera dite p-Banach.

Dans [5], S. Warner a introduit la notion "advertibly complete" pour les *a. l. m. c.* et A. Mallios ([4]) l'a étendue aux algèbres topologiques quelconques. Dans le cas A-p-normé, on a la définition suivante.

Définition 2.1. Soient $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre A-p-normée, unitaire et $(x_n)_n$ une suite dans E. On dit que $(x_n)_n$ est advertiblement convergente s'il existe un élément x dans E tel que les suites $(xx_n)_n$ et $(x_nx)_n$ convergent vers l'unité e. L'algèbre E est dite advertiblement complète, si toute suite de Cauchy, advertiblement convergente, est convergente.

Remarque 2.2. Si $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, est une algèbre A-p-normée unitaire qui est une Q-algèbre (i.e., le groupe $G(E)$ des éléments inversibles de E est ouvert), alors $(E, \|.\|_p)$ est advertiblement complète. La réciproque est en général fausse ([1]).

Soit $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre A-p-normée. La topologie τ définie par $\|.\|_p$, n'est pas en général localement convexe. Mais il existe, sur E, des topologies localement convexes moins fines que τ. Dans [3], C. Lescarret et J. Moreau ont défini la convexifiée d'une topologie d'espace vectoriel topologique. Par commodité, nous donnons la définition dans le cas p-normé.

Définition 2.3. Soit $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, un espace p-normé de topologie τ. La convexifiée notée $\widehat{\tau}$, de τ, est la topologie la plus fine parmi les topologies localement convexes, qui sont moins fines que τ.

Remarque 2.4. Soit $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, un espace p-normé de topologie τ. On vérifie facilement que $\widehat{\tau}$ peut être définie par la jauge, notée $\|.\|_c$, de l'enveloppe convexe de la boule unité de $\|.\|_p$.

Dans toute la suite, les algèbres seront complexes. Pour tout élément x d'une algèbre unitaire, le spectre de x est l'ensemble $Spx = \{\lambda \in \mathbf{C} : \lambda e - x \notin G(E)\}$. Le rayon spectral de x est $\varrho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in Spx\}$. Dans une algèbre A-p-normée $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, on désigne par $|||.|||_p$ la p-norme d'algèbre donnée par $|||x|||_p = \sup\{\|xy\|_p : \|y\|_p \leq 1\}$, pour tout $x \in E$.

3. Exemples

1) Soit W_p, $0 < p \leq 1$, l'algèbre des séries $\varphi(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ définies sur le cercle unité telle que $\sum_{n\geq 0} |a_n|^p < +\infty$. Soit $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante et strictement positive. Pour tout $\varphi \in W_p$, posons $\|\varphi\|_p = \sum_{n\geq 0} \alpha_n |a_n|^p$. Il est clair que $\|.\|_p$ est une p-norme d'espace vectoriel telle que $\|\varphi\psi\|_p \leq M(\varphi)\|\psi\|_p$, pour $\varphi, \psi \in W_p$, où $M(\varphi) = \sum_{n\geq 0} |a_n|^p$. Ainsi, pour le produit ordinaire, l'espace $(W_p, \|.\|_p)$ est une algèbre A-p-normée. L'algèbre $(W_p, \|.\|_p)$ n'est pas en général à produit continu. Pour $0 < p < 1$, cette algèbre n'est pas localement convexe. Car sinon, il existerait un voisinage convexe U de l'origine et $\varepsilon > 0$ tels que $\{\varphi \in W_p : \|\varphi\|_p \leq \varepsilon\} \subset U \subset \{\varphi \in W_p : \|\varphi\|_p < 1\}$. Pour $n \geq 1$, posons $\psi_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \varphi_k$, où $\varphi_k(z) = (\frac{\varepsilon}{\alpha_k})^{\frac{1}{p}} z^k$. On a $\|\varphi_k\|_p = \varepsilon$, pour tout k. Donc $\psi_n \in U$. Or $\|\psi_n\|_p = \varepsilon n^{1-p} > 1$ pour n assez grand; ce qui contredit le fait que $U \subset \{\varphi \in W_p : \|\varphi\|_p < 1\}$. Soit maintenant $\varphi \in W_p$, $\varphi(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. On a

$$\|\varphi\|_c \leq \sum_{n\geq 0} |a_n| \, \|z^n\|_c \leq \sum_{n\geq 0} \alpha_n^{\frac{1}{p}} |a_n|.$$

D'où $\|\varphi\|_c = \sum_{n\geq 0} \alpha_n^{\frac{1}{p}} |a_n|$, vu que $\|.\|$ définie par $\|\varphi\| = \sum_{n\geq 0} \alpha_n^{\frac{1}{p}} |a_n|$ est une norme moins fine que $\|.\|_p$.

2) Soit E l'algèbre des fonctions complexes f mesurables sur $[0,1]$ et qui sont de la forme $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{A_i}$, $n \in \mathbf{N}^*$ et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une partition de $[0,1]$ tels que $mes(A_i) > 0$, pour tout $i = 1, ..., n$. On munit E de la p-norme d'espace vectoriel définie par $\|f\|_p = \int_{[0,1]} |f(t)|^p \, dt$, $0 < p \leq 1$. L'algèbre $(E, \|.\|_p)$ est alors A-p-normée. Pour $0 < p < 1$, cette algèbre n'est pas localement convexe ([1]). Soit maintenant $f \in E$. Considèrons la partition $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = 1$, de $[0,1]$, telle que $t_j - t_{j-1} \leq \frac{1}{m^{2p}}$, pour tout $1 \leq j \leq m$, où $m \in N^*$. Comme $f = \sum_{j=1}^m f\chi_{B_j}$, avec $B_j = [t_{j-1}, t_j]$, on a

$$\|f\|_c \leq \sup\{|f(t)| \sum_{j=1}^m \|\chi_{B_j}\|_c : t \in [0,1]\} \leq \frac{1}{m}\{\sup |f(t)| : t \in [0,1]\}.$$

Par passage à la limite en m, on obtient $\|f\|_c = 0$.

3) Soit (Ω, m) un espace mesuré. On note par $L_p(\Omega)$ l'espace (des classes d'équivalences) de fonctions complexes m-mesurables telles que $\int_\Omega |f|^p \, dm < \infty$,

$0 < p \leq 1$. Pour $f \in L_p(\Omega)$, posons $\|f\|_p = \int_\Omega |f|^p \, dm$. L'espace $\left(L_p(\Omega), \|.\|_p\right)$ est un p-Banach. Il n'est pas nécessairement une algèbre pour le produit ponctuel. Soit $L_p^b(\Omega) = \{f \in L_p(\Omega) : f \text{ est bornée}\}$. L'espace $(L_p(\Omega), \|.\|_p)$ est une algèbre $A-p$-normée. Pour $0 < p < 1$, elle n'est pas, en général, localement convexe ([1]). Si Ω est du type continu, alors $\|.\|_c$ est nulle. En effet, soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$, $n \in N^*$, une partition de Ω telle que $mes(A_i) \leq \frac{1}{n^{2p}}$, pour tout $i = 1, ..., n$. Comme tout élément $f \in L_p^b(\Omega)$ peut s'écrire $f = \sum_{i=1}^{n} f\chi_{A_i}$, on a

$$\|f\|_c \leq \sup\{|f(x)| \sum_{i=1}^{n} mes(A_i) : x \in \Omega\} \leq \frac{1}{n} \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\}.$$

Par passage à la limite en n, on obtient $\|f\|_c = 0$. Si maintenant $\Omega = \{x_n : n \geq 0\}$ est un ensemble discret et infini, en écrivant $f = \sum_{n\geq 0} f\chi_{\{x_n\}}$, on obtient

$$\|f\|_c \leq \sum_{n\geq 0} \|f\chi_{\{x_n\}}\|_p^{\frac{1}{p}} = \sum_{n\geq 0} |f(x_n)|.$$

De plus, cette dernière expression définit une norme, sur $L_p^b(\Omega)$, moins fine que $\|.\|_p$. Donc $\|f\|_c = \sum_{n\geq 0} |f(x_n)|$.

4) Soit $E = \mathbf{C} \times L_p(\Omega)$ muni de la p-norme $\|(\alpha, f)\|_p = |\alpha|^p + \|f\|_p$. Pour le produit donné par $(\alpha, f)(\beta, g) = (\alpha\beta, \alpha g + \beta f)$, l'algèbre $(E, \|.\|_p)$ est p-Banach non localement convexe. En utilisant l'exemple 3, on montre que si Ω est de type continu, alors $\|(\alpha, f)\|_c = |\alpha|$. Si $\Omega = \{x_n : n \geq 0\}$ est un ensemble discret et infini, on a

$$\|(\alpha, f)\|_c = |\alpha| + \sum_{n\geq 0} |f(x_n)|.$$

Plus généralement, soit $(F, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, un espace p-normé. On munit $E = \mathbf{C} \times F$ de la p-norme suivante $\|(\alpha, f)\|_p = |\alpha|^p + \|f\|_p$, $(\alpha, f) \in E$. On définit sur E, le produit par $(\alpha, f)(\beta, g) = (\alpha\beta,\ \alpha g\ +\ \beta f)$. L'algèbre $(E, \|.\|_p)$ est p-normée telle que

$$\|(\alpha, f)\|_c = |\alpha| + \|f\|_c, \quad \text{pour tout} \quad (\alpha, f) \in E.$$

5) Soit $E = \mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$ l'algèbre des suites complexes nulles à partir d'un certain rang. Soit $(\alpha_n)_n$ une suite strictement positive et bornée. On munit E de la p-norme donnée par $\|(x_n)\|_p = \sum_{n\geq 1} \alpha_n |x_n|^p$, $0 < p \leq 1$. L'algèbre $(E, \|.\|_p)$ est A-p-normée. Pour $0 < p < 1$, elle n'est pas localement convexe ([1]). Soit maintenant $(x_n)_{n\geq 1} \in E$. En écrivant $(x_n)_n = \sum_{n\geq 1} x_{(n)}$, où $x_{(n)} = (0, ..., x_n, 0, ...)$, on a

$$\|(x_n)\|_c \leq \sum_{n\geq 1} \|(x_{(n)}\|_p^{\frac{1}{p}} = \sum_{n\geq 1} \alpha_n^{\frac{1}{p}} |x_n|.$$

Comme la norme $\|.\|$ définie par $\|(x_n)_n\| = \sum_{n\geq 1} \alpha_n^{\frac{1}{p}} |x_n|$, pour tout $(x_n)_{n\geq 1} \in E$, est moins fine que $\|.\|_p$, on a $\|(x_n)\|_c = \sum_{n\geq 1} \alpha_n^{\frac{1}{p}} |x_n|$, pour tout $(x_n)_{n\geq 1} \in E$.
6) Soit $C_b(\mathbf{R})$ l'algèbre des fonctions continues et bornées sur $\mathbf{R}$. Une façon naturelle de construire une A-p-norme sur $C_b(\mathbf{R})$ est de considérer, pour $0 < p \leq 1$ et $\psi \in C_b(\mathbf{R})$ fixés, $\|f\|_p = \sup\{|f(x)|^p |\psi(x)| : x \in \mathbf{R}\}$, $f \in C_b(\mathbf{R})$. On serait tenter de montrer que cette algèbre n'est pas localement convexe pour $0 < p < 1$. En fait l'expression de $\|.\|_p$ ne détruit pas la convexité. En effet, on vérifie facilement que

$$\|f.\|_c = \sup\left\{|\psi(x)|^{\frac{1}{p}} |f(x)| : x \in R\right\}, \text{ pour tout } f \in C_b(\mathbf{R}).$$

Donc $\|.\|_c^p = \|.\|_p$.

Remarque 3.1. Soit $(E, \|.\|_p)$ $, 0 < p \leq 1$, une algèbre A-p-normée non nécessairement unitaire. Alors l'algèbre $E^1 = \mathbf{C} \oplus E$ obtenue par adjonction d'une unité à E munie de la p-norme $\|\alpha + x\|_p = |\alpha|^p + \|x\|_p$, pour $\alpha \in \mathbf{C}$, $x \in E$, est une algèbre A-p-normée telle que $\|\alpha + x\|_c = |\alpha| + \|x\|_c$, pour tous $\alpha \in \mathbf{C}$ et $x \in E$.

4. Convexifiée d'une topologie d'algèbre A-p-normée

La convexifiée d'une topologie d'algèbre A-p-normée peut être définie par une A-semi-norme dont la forme explicite est donnée par le résultat suivant.

Proposition 4.1. *Soient (E, τ) une algèbre localement bornée et $\|.\|_p$, $0 < p \leq 1$, la semi-norme définissant τ. Alors*

1) *la convexifiée $\widehat{\tau}$ peut être définie par la semi-norme donnée par $\|x\|_c = \inf \sum_{i=1}^n \|x_i\|_p^{\frac{1}{p}}$, où l'inf est pris sur toutes les décompositions $x = \sum_{i=1}^n x_i$, $x_i \in E$,*

2) *de plus l'algèbre $(E, \|.\|_c)$ est A-semi-normée.*

Preuve. Tout d'abord, par la remarque 2.4, $\|.\|_c$ est la jauge de l'enveloppe convexe de la boule unité de $\|.\|_p$.

1) Soit maintenant $x = \sum_{i=1}^n x_i$, $x_i \in E$, une décomposition quelconque de x. Alors $\|x\|_c \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|_c \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|_p^{\frac{1}{p}}$. D'où $\|x\|_c \leq \inf \sum_{i=1}^n \|x_i\|_p^{\frac{1}{p}}$. Pour $x \in E$, posons $\|x\| = \inf \sum_{i=1}^n \|x_i\|_p^{\frac{1}{p}}$; c'est une semi-norme d'espace vectoriel telle que $\|x\| \leq \|x\|_p^{\frac{1}{p}}$, pour tout $x \in E$. Comme $\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ est convexe, on a $\|x\| \leq \|x\|_c$, pour tout $x \in E$. D'où $\|x\|_c = \inf \sum_{i=1}^n \|x_i\|_p^{\frac{1}{p}}$.

2) Il reste à montrer que, pour tout $x \in E$, il existe $M(x) > 0$ tel que $\|xy\|_c \leq M(x) \|y\|_c$, pour tout $y \in E$. Soient $x = \sum_{i=1}^n x_i$ et $y = \sum_{i=1}^m y_i$, $x_i, y_i \in E$. Pour tout $i = 1, ..., n$, il existe $M(x_i) > 0$ tel que $\|x_i y_j\|_p \leq M(x_i) \|y_j\|_p$, pour tout $j = 1, ..., m$. Donc

$$\|xy\|_c \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|x_i y_j\|_p^{\frac{1}{p}} \leq M(x) \sum_{j=1}^m \|y_j\|_p^{\frac{1}{p}} \leq M(x) \|y\|_c,$$

où $M(x) = \sum_{i=1}^n M(x_i)^{\frac{1}{p}}$.

Remarque 4.2. Si $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, est une algèbre p-normée, alors $(E, \|.\|_c)$ est une algèbre semi-normée. Dans ce cas $\|.\|_c$ n'est autre que la pseudo-norme support introduite dans [6].

Si $(E, \|.\|_c)$ est une algèbre A-normée, il est clair que le dual topologique E', de $(E, \|.\|_p)$, sépare les points de E. La réciproque est également vraie.

Proposition 4.3. *Soit $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre A-p-normée. Si le dual topologique E' sépare les points de E, alors $(E, \|.\|_c)$ est une algèbre A-normée.*

Preuve. Montrons que $(E, \|.\|_c)$ est séparé. Soit $a \neq 0$. Il existe $f \in E'$ telle que $f(a) \neq 0$. Par la continuité de f, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $|f(x)| \leq \alpha \|x\|_p^{\frac{1}{p}}$, pour tout $x \in E$. D'où $|f(a)| \leq \alpha \sum_{i=1}^n \|a_i\|_p^{\frac{1}{p}}$, pour toute décomposition $a = \sum_{i=1}^n a_i$, $a_i \in E$. Donc $|f(a)| \leq \alpha \|a\|_c$.

Le résultat suivant concerne la conservation de la propriété Q-algèbre par convexification.

Proposition 4.4. *Soit $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre A-p-normée commutative qui est une Q-algèbre. Alors $(E, \|.\|_c)$ est une Q-algèbre A-semi-normée et donc $\{x \in E : \|x\|_c = 0\} \subset RadE$.*

Preuve. Comme $(E, \|.\|_p)$ est une Q-algèbre, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $\varrho(x) \leq \alpha \|x\|_p^{\frac{1}{p}}$, pour tout $x \in E$. Par ailleurs, pour tout $a \in E$, $Spa = \{\chi(a) : \chi \in M^*(E)\}$, où $M^*(E)$ est l'ensemble des caractères non nuls de E. Donc le rayon spectral ϱ est sous-additif. Soit maintenant $x = \sum_{i=1}^n x_i$, $x_i \in E$, une décomposition quelconque de x. On a $\varrho(x) \leq \alpha \sum_{i=1}^n \|x_i\|_p^{\frac{1}{p}}$. D'où $\varrho(x) \leq \alpha \|x\|_c$. Par conséquent $(E, \|.\|_c)$ est une Q-algèbre. Enfin si $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\|_c = 0$, alors $\varrho(x_0) = 0$ et donc $x_0 \in RadE$.

Comme conséquence immédiate, on a ce qui suit.

Corollaire 4.5. *Soit $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre p-normée commutative qui est une Q-algèbre. Si E est semi-simple, alors $(E, \|.\|_c)$ est une Q-algèbre normée.*

Dans une algèbre p-normée $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, on sait que $\lim_n \|x^n\|_c^{\frac{1}{n}} = n\lim \|x^n\|_p^{\frac{1}{np}}$, pour tout $x \in E$ ([6]). L'exemple 2 montre que cette dernière égalité ne reste plus valable dans une algèbre A-p-normée. Cependant, on a le résultat suivant.

Proposition 4.6. *Soit $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre A-p-normée qui est une Q-algèbre. Alors*

$$\varrho(x) = \overline{\lim_n} \|x^n\|_c^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim_n} \|x^n\|_p^{\frac{1}{np}}, \text{ pour tout } x \in E.$$

Preuve. Quitte à considérer la sous-algèbre pleine engendrée par $x \in E$, on peut supposer que E est commutative. Comme $(E, \|.\|_p)$ est une Q-algèbre, on a $\varrho(x)$

$\leq \overline{\lim_n} \|x^n\|_c^{\frac{1}{n}}$ par la proposition 4.4. Par ailleurs on a

$$\overline{\lim_n} \|x^n\|_c^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim_n} \|x^n\|_p^{\frac{1}{np}} \leq \lim_n |||x^n|||_p^{\frac{1}{np}},$$

où $|||x|||_p = \sup\{\|xy\|_p : \|y\|_p \leq 1\}$, pour tout $x \in E$. Enfin, si $M^*(E)$ désigne l'espace des caractères non nuls de E, alors

$$\lim_n |||x^n|||_p^{\frac{1}{np}} = \max\{|\chi(x)| : \chi \in M^*(E)\} = \varrho(x).$$

D'où le résultat.

Remarque 4.7. Dans une algèbre A-p-normée commutative $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, qui est une Q-algèbre, l'application $r : x \longmapsto r(x) = \overline{\lim_n} \|x^n\|_p^{\frac{1}{n}}$ est une p-norme d'algèbre. De plus $r^{\frac{1}{p}}$ est une semi-norme d'algèbre moins fine que $\|.\|_p$. Dans le cas particulier d'une algèbre p-Banach, l'application r n'est autre que la p-semi-norme $\|.\|_s$ dite "spectral norm" introduite par W. Żelazko dans [7] et [8].

L'existence d'une algèbre A-p-normée unitaire advertiblement complète telle que $\|.\|_c = 0$ montre que le résultat précédent ne reste plus valide dans le cas advertiblement complet. Dans le cas commutatif, on a ce qui suit.

Corollaire 4.8. *Soit $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre A-p-normée unitaire commutative et advertiblement complète. Alors*

$$\max\{|\chi(x)| : \chi \in M(E, \|.\|_p)\} \leq \overline{\lim_n} \|x^n\|_c^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim_n} \|x^n\|_p^{\frac{1}{np}} \leq \varrho(x),$$

où $M(E, \|.\|_p)$ désigne l'espace des caractères non nuls continus de $(E, \|.\|_p)$.

Preuve. L'algèbre $(E, |||.|||_p)$ est une Q-algèbre vu que $(E, \|.\|_p)$ est advertiblement complète. Donc $\lim_n |||x^n|||_p^{\frac{1}{np}} = \max\{|\chi(x)| : \chi \in M(E, |||.|||_p)\} = \varrho(x)$.

Remarque 4.9. Dans une une algèbre A-p-normée unitaire advertiblement complète $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, on a

$$\begin{aligned}\max\{|\chi(x)| : \chi \in M(E, \|.\|_p)\} &\leq \overline{\lim_n} \|x^n\|_c^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \overline{\lim_n} \|x^n\|_p^{\frac{1}{np}} \leq \max\{|\chi(x)| : \chi \in M(E, |||.|||_p)\},\end{aligned}$$

où $M(E, |||.|||_p)$ désigne l'espace des caractères non nuls continus de $(E, |||.|||_p)$.

Si dans la proposition 4.4, l'algèbre $(E, \|.\|_p)$ est seulement advertiblement complète, alors $(E, \|.\|_c)$ n'est pas une Q-algèbre. Elle n'est même pas advertiblement complète. En effet; l'algèbre $(E, \|.\|_p)$ de l'exemple 2 est une A-p-normée advertiblement complète telle que $\|.\|_c = 0$; et par le corollaire III.7 de [1], l'algèbre $(E, \|.\|_c)$ n'est pas advertiblement complète. On peut alors se demander s'il existe une semi-norme $\|.\|$, sur E, plus fine que $\|.\|_c$, et telle que $(E, \|.\|)$ soit une Q-algèbre. Remarquons tout d'abord que l'exemple 2 montre aussi que l'algèbre $(E, \|.\|_0)$, où $\|.\|_0$ est donnée par $\|x\|_0 = \sup\{\|xy\|_c : \|y\|_c \leq 1\}$, n'est pas une Q-algèbre. Examinant la situation, on obtient ce qui suit.

Proposition 4.10. *Soit* $(E, \|.\|_p)$, $0 < p \leq 1$, *une algèbre* A-p*-normée unitaire, non nécessairement commutative, qui est advertiblement complète. Alors il existe une semi-norme d'algèbre* $\|.\|$, *plus fine que* $\|.\|_c$, *telle que* $(E, \|.\|)$ *est une* Q*-algèbre; et donc* $\{x \in E : \|x\| = 0\} \subset RadE$.

Preuve. Soit $|||.|||_p$ la p-semi-norme d'algèbre associée à $\|.\|_p$. Il est facile de vérifier que $(E, |||.|||_p)$ est advertiblement complète, et donc une Q-algèbre. D'où $\varrho(x)^p \leq |||x|||_p$, pour tout $x \in E$. Pour $x \in E$, posons $\|x\| = |||x|||_c = \inf \sum_{i=1}^{n} |||x_i|||_p^{\frac{1}{p}}$, où l'inf est pris sur toutes les décompositions $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $x_i \in E$. Montrons alors que $(E, \|.\|)$ est une Q-algèbre. Pour ce faire, prouvons d'abord que $\lim_{n \to +\infty} |||x^n|||_p^{\frac{1}{np}} \leq \|x\|$, pour tout $x \in E$. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $x_i \in E$, une décomposition quelconque de x et $n \in N^*$. Alors

$$|||x^n|||_p \leq \alpha_1 + .. + \alpha_m = n \sum \left(\frac{n!}{\alpha_1!...\alpha_m!}\right)^p |||x_1|||_p^{\alpha_1} ... |||x_m|||_p^{\alpha_m}.$$

Par un calcul facile, on obtient

$$|||x^n|||_p \leq \left(1 \leq i \leq m \sum |||x_i|||_p^{\frac{1}{p}}\right)^{pn} (1+n)^m.$$

D'où $\lim_{n \to +\infty} |||x^n|||_p^{\frac{1}{p^n}} \leq 1 \leq i \leq m \sum |||x_i|||_p^{\frac{1}{p}}$. Par suite $\lim_{n \to +\infty} |||x^n|||_p^{\frac{1}{p^n}} \leq \|x\|$. Comme $\varrho(x)^n = \varrho(x^n) \leq |||x|||_p^{\frac{1}{p}}$, il en résulte que $\varrho(x) \leq \|x\|$. Donc $(E, \|.\|)$ est une Q-algèbre. La semi-norme $\|.\|$ est plus fine que $\|.\|_c$ puisque $\|.\|_c^p \leq \|.\|_p$ et $\|.\|_p \leq |||.|||_p$. Enfin montrons que $\{x \in E : \|x\| = 0\} \subset RadE$. Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 0$. Pour tout $y \in E$, l'élément $z = yx$ est tel que $\|z\| = 0$. D'où $\lim_{n \to +\infty} \|z^n\|_p^{\frac{1}{np}} = 0$. Donc $e - z$ est inversible; et par conséquent $x \in RadE$.

Remarque 4.11. 1) La semi-norme $\|.\|$ donnée par la proposition 4.6 est en général strictement plus fine que $\|.\|_0$.
2) Le corollaire 4.5. est également vrai dans le cas non nécessairement commutatif.

References

[1] A. El Kinani, M. Chahboun, M. Oudadess, *Algèbres A-p-normées advertiblement complètes*, Bull. Belg. Math. Soc. **6** (1999) (A paraître).

[2] G. Köthe, *Topological vector spases* I, Springer-Verlag. 1983.

[3] C. Lescarret, J.J. Moreau, *Convexifiée d'une topologie d'espace vectoriel topologique*, Séminaire d'Analyse convexe -1- Montpellier (1971), 21–27.

[4] A. Mallios, *Topological algebras. Selected topics*, North-Holland. 1986.

[5] S. Warner, *Polynomial completness in locally multiplicatively convex algebras*, Duke-Math. (1956), 1–11.

[6] Xia Dao-Xing (Hsia Tao-Hsing), *On locally bounded topological algebras*, Acta Math. Sinica 14 N° **2** (1964). Engl. translation: Chinese-Math. **2** (1964), 261–276.

[7] W. Żelazko, *On the locally bounded and m-convex topological algebras*, Studia Math. **19**, 333–355.
[8] W. Żelazko, *Selected topics in topological algebras*, Lecture notes. Series **31**(1971), Matimatisk Institut Aarhus Universiet-Aarhus.

Address: Ecole Normale Supérieure B.P. 5118 Takaddoum 10105 Rabat (Maroc).
Received: 12 January 2000