Functiones et Approximatio
XXIX (2001), 7-16

IDÉAUX NON REMOVABLES DANS LA CLASSE DES ALGÈBRES BORNOLOGIQUES

M. AKKAR, A. TAJMOUATI & A. ZINEDINE

Abstract: Let $\mathfrak{B}$ be the class of all bornological algebras. Let A be in $\mathfrak{B}$. We show that an ideal I of A is non-removable if and only if it consists of joint bounding elements (déf.2).
Keywords: Bornological algebras, bounding elements, non-removable ideals, ideals consisting of joint bounding elements.

1. Introduction

Parmi les problèmes rencontrés dans la théorie des algèbres de Banach, on trouve celui de la caractérisation des éléments singuliers permanents et des idéaux non-removables. Dans ce cadre, Arens [1] a montré que dans la classe **B** des algèbres de Banach, un élément x est singulier permanent si, et seulement si, il est diviseur topologique de zéro. Après, Müller [4] a prouvé qu'un idéal I d'une algèbre de Banach est **B**-non-removable si, et seulement si, il est constitué de diviseurs topologiques joints de zéro (notion introduite par Żelazko [7]). D'autres auteurs ont examiné le problème dans des classes plus larges; par exemple, Żelazko a caractérisé les éléments singuliers permanents et les idéaux non-removables dans les classes **M** et **LC** (algèbres multiplicativement convexes et localement convexes). D'autres conditions suffisantes pour qu'un idéal soit **T**-non-removable sont fournies dans [3] et [7]. (**T** étant la classe de toutes les algèbres topologiques).

Dans [5], nous avons introduit la notion d'élément bornant dans une algèbre bornologique et nous avons montré que cette notion coincide avec celle de diviseur topologique de zéro dans le cas d'une algèbre topologique métrisable (munie de sa bornologie de von Neumann). Par suite, nous avons prouvé qu'un élément d'une algèbre bornologique est singulier permanent dans la classe $\mathfrak{B}$ de toutes les algèbres bornologiques si, et seulement si, il est bornant.

Dans ce travail, nous nous proposons de traiter le problème d'idéaux non--removables dans le cas bornologique. Nous introduisons la notion d'idéal formé d'éléments bornants joints de zéro. Cette notion est équivalente à celle d'idéal

---

2000 Mathematics Subject Classification: *46H05, 46A09*

formé de diviseurs topologiques joints de zéro dans le cas d'une algèbre de Banach (munie de sa bornologie de von-Neumann). Nous montrons que dans $\mathfrak{B}$ un idéal est non-removable si, et seulement si, il est constitué d'éléments bornants joints. Donc, dans $\mathfrak{B}$ nous obtenons des résultats analogues à ceux du cas des algèbres de Banach.

2. Préliminaires

Toutes les algèbres considérées dans la suite sont des algèbres commutatives et unitaires sur $\mathbf{K}(=\mathbf{R}$ où $\mathbf{C})$.

On rappelle brèvement les résultats topologiques suivants: Soient A une algèbre topologique , $x \in A$ et I un idéal de A.

- x est dit diviseur topologique de zéro si, et seulement si, il existe une suite généralisée (x_α) qui ne converge pas vers 0 et telle que (xx_α) converge vers 0.
- I est dit formé de diviseurs topologiques joints de zéro s'il existe (x_α)dans A qui ne converge pas vers 0 et telle que, (xx_α) converge vers 0 pour tout x dans I.

i) un diviseur topologique de zéro est $\mathbf{T}$-singulier ([6]).

ii) un idéal formé de diviseurs topologiques joints de zéro est $\mathbf{T}$-non-removable ([7])

iii) la réciproque de $i)$ et $ii)$ est vraie si on remplace $\mathbf{T}$ par $\mathbf{B}$([1] et [4]).

Dans le cas bornologique, les définitions sont analogues au cas topologique:

- Soit E un espace vectoriel. Une bornologie sur E est dite vectorielle si, la somme de deux bornés, l'image d'un borné par une homothétie, et l'enveloppe équilibré d'un borné sont des bornés de E.
- Une algèbre A est dite bornologique s'elle est munie d'une bornologie vectorielle séparée rendant la multiplication bornée.
- Soient A et A' deux algèbres bornologiques. Une application linéaire f de A dans A' est dite un isomorphisme bornologique s'elle est bijective bornée et f^{-1} est aussi bornée.
- On dit que A' est une extension bornologique de A s'il existe un isomorphisme bornologique f de A dans une sous-algèbre unitaire de A' tel que: $f(e) = e'$ (où e et e' sont les éléments unités de A et A' respectivement).
- Un élément $x \in A$ est dit $\mathfrak{B}$-régulier s'il existe une extension bornologique de A dans laquelle x est inversible. Dans le cas contraire, il est dit $\mathfrak{B}$-singulier ou singulier permanent.
- Un n-uplet $(a_1, \ldots, a_n)$ d'éléments de A est dit $\mathfrak{B}$-régulier s'il existe une extension bornologique A' de A et un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de A' tels que: $\sum_{i=1}^n a_i x_i = e$.
- On dit qu'une extension A' remove un idéal I de A, ou que I est removable, si I n'est contenu dans aucun idéal propre de A'. Ceci est équivalent à dire qu'il existe un n-uplet $\mathfrak{B}$-régulier d'éléments de I. Donc caractériser les idéaux $\mathfrak{B}$-non-removables revient à caractériser les n-uplets $\mathfrak{B}$-réguliers.

3. Idéaux non-removables dans la classe $\mathfrak{B}$

Soient A une algèbre bornologique, $x \in A$ et I un idéal de A.

Définition 1. x est dit bornant s'il existe une partie D non borné de A telle que xD est borné.

Remarque 1. Dans [5], on a démontré que dans la classe $\mathfrak{B}$, un élément est singulier permanent si, et seulement si, il est bornant. Donc l'idéal engendré par un élément bornant est non-removable. Mais il y a des idéaux qui sont formés entièrement d'éléments bornants et qui sont, cependent, removables. (C'est le cas, par exemple, d'un idéal d'une algèbre de Banach formé entièrement de diviseurs topologiques de zéro (qui sont des éléments bornants), et qui est, cependant, removable). C'est pourquoi la définition suivante est nécéssaire:

Définition 2. – Un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de A est dit formé d'éléments bornants joints s'il existe une partie non bornée D de A et un entier naturel p, tels que: $x_i^p D$ soit borné pour $i = 1, \ldots, n$.
– Un idéal I est dit formé d'éléments bornants joints si, pour tout entier n, tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ est formé d'éléments bornants joints.

Proposition 1. *Soient I un idéal d'une algèbre bornologique A et $(a_1, \ldots, a_n)$ un n-uplet d'éléments de I. Alors $(a_1, \ldots, a_n)$ n'est pas formé d'éléments bornants joints si, et seulement si, pour tout borné B de A et tout entier p, il existe un borné B' de A tel que pour tout x dans A on a:*

$$a_i^p x \in B \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \Longrightarrow x \in B' \qquad (*)$$

Preuve. Si $(a_1, \ldots, a_n)$ n'est pas formé d'éléments bornants joints. Supposons qu'il existe un borné B et un entier p tels que pour tout borné B' on a:

$$\exists x_{B'} \notin B' \text{ et } a_i^p x_{B'} \in B \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Alors $a_i^p\{x_{B'} : \quad B' \text{ borné de } A\}$ est contenu dans B pour tout i, sans que $\{x_{B'} : B' \text{ borné de } A\}$ soit borné (car pour tout borné B', l'élément $x_{B'}$ de cet ensemble n'est pas dans B'). Ce qui est contradictoire!
Si $(*)$ est vérifiée. Supposons que $(a_1, \ldots, a_n)$ est formé d'éléments bornants joints. Il existe alors une partie non bornée D de A et un entier p tels que $a_i^p D$ soit borné pour tout i. Posons $B = \bigcup_{i=1}^n a_i^p D$. Alors B est un borné.
Pour B et p, il existe un borné B' qui vérifie $(*)$ avec B et p. C'est-à-dire que pour tout x dans A on a:

$$a_i^p x \in B \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \Longrightarrow x \in B'.$$

En particulier, pour tout d dans D on a $a_i^p d \in B$, d'où $d \in B'$. Ce qui donne $D \subset B'$. Donc D est borné. Absurde. ∎

Pour démontrer le théorème principale de ce travail, nous montrons quelques résultats auxiliaires:

Un multi-indice est un élément de $\mathbf{Z}^n$. On munit l'ensemble des multi-indices par l'addition suivante:

$$(\mu_1, \ldots, \mu_n) + (\nu_1, \ldots, \nu_2) = (\mu_1 + \nu_1, \ldots, \mu_n + \nu_n).$$

Soit A une algèbre bornologique. Notons $A[X]$ (où: $X = (X_1, \ldots, X_2)$) l'algèbre des polynômes à n indéterminées et à coefficients dans A. Tout polynôme P s'écrit sous la forme: $P(X) = \sum_{\mu \in \mathbf{Z}^n} a_\mu X^\mu$ avec:

$$\begin{aligned}
&X^\mu = X_1^{\mu_1} \ldots X_n^{\mu_n} \text{ si } \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)\\
&a_\mu = 0 \quad \text{si} \quad \mu \in \mathbf{Z}^n \backslash \mathbf{N}^n\\
&a_\mu = 0 \text{ sauf pour un nombre fini de multi-indices.}
\end{aligned}$$

Si $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, on note: $|\mu| = \mu_1 + \ldots + \mu_n$ et $|\mu|_i = \mu_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. On note aussi pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ où le 1 est situé dans la $i^{éme}$ colonne.
Notons β la bornologie de A. Sur $A[X]$ considérons la bornologie β' définie par la base suivante:

$$\{W_p(B_0, \ldots, B_p) : \ p \in \mathbf{N} \text{ et } B_0, \ldots, B_p \text{ sont des bornés équilibrés de } A\}$$

Où:

$$W_p(B_0, \ldots, B_p) = \left\{ P(X) = \sum_{\mu \in \mathbf{Z}^n} a_\mu X^\mu \in A[X] : \begin{array}{l} a_\mu \in B_{|\mu|} \ \text{ si } \ 0 \leq |\mu| \leq p \\ a_\mu = 0 \ \text{ si } \ |\mu| > p \\ a_\mu = 0 \ \text{ si } \ \mu \in \mathbf{Z}^n \setminus \mathbf{N}^n \end{array} \right\}$$

On vérifie facilement que $(A[X], \beta')$ est une algèbre bornologique séparée.

Lemme 1. *Soit* $P \in A[X]$ *tel que* $(e - \sum_{i=1}^n a_i X_i) P(X) \in W_p(B_0, \ldots, B_p)$. *Alors, si* $P(X) = \sum_{\mu \in \mathbf{Z}^n} a_\mu X^\mu$, *on a* $a_\mu = 0$ *pour tout* μ *tel que* $|\mu| \geq p$.

Preuve. $(e - \sum_{i=1}^n a_i X_i) P(X) \in W_p$ implique que:

$$a_{(0,\ldots,0)} + \sum_{|\mu| \geq 1} (a_\mu - \sum_{i=1}^n a_i a_{\mu - \delta_i}) X^\mu \in W_p(B_0, \ldots, B_p).$$

D'où:

$$\begin{aligned}
&a_{(0,\ldots,0)} \in B_0\\
&a_\mu - \sum_{i=1}^n a_i a_{\mu-\delta_i} \in B_{|\mu|} \ \text{ si } \ 0 \leq |\mu| \leq p \ \text{ et :}\\
&a_\mu = \sum_{i=1}^n a_i a_{\mu-\delta_i} \ \text{ si } \ |\mu| \geq p+1 \qquad (*)
\end{aligned}$$

Soit k le plus petit entier supérieur où égal à p et tel que $a_\mu = 0$ pour tout μ verifiant $|\mu| \geq k+1$. Nous montrons que $a_\mu = 0$ aussi pour tout μ tel que $|\mu| = k$. Soit donc μ un multi-indice verifiant $|\mu| = k$. On a:

$$\begin{cases} a_{\mu+\delta_1} = 0 \quad \text{car} \quad |\mu + \delta_1| = k+1, \\ a_{\mu+\delta_1} = \sum_{i=1}^{n} a_i a_{\mu+\delta_1-\delta_i} \quad \text{(en utilisant } (*)) \end{cases}$$

D'où:

$$a_1 a_\mu = -\sum_{i=2}^{n} a_i a_{\mu+\delta_1-\delta_i}. \tag{$**$}$$

$(**)$ est aussi valable pour $a_{\mu+\delta_1-\delta_i}$, $i = 1, \ldots, n$; car $|\mu + \delta_1 - \delta_i| = |\mu| = k$. D'où:

$$\begin{aligned} a_1^2 a_\mu &= -\sum_{i=2}^{n} a_i (a_1 a_{\mu+\delta_1-\delta_i}) = -\sum_{i=2}^{n} a_i \Big(-\sum_{j=2}^{n} a_j a_{\mu+2\delta_1-\delta_i-\delta_j}\Big) \\ &= \sum_{2\leq i,j\leq n} a_i a_j a_{\mu+2\delta_1-\delta_i-\delta_j} \end{aligned}$$

Par récurrence on arrive à:

$$a_1^{k+1} a_\mu = (-1)^{k+1} \sum_{\substack{2\leq i_1\leq n \\ \vdots \\ 2\leq i_{k+1}\leq n}} a_{i_1} \ldots a_{i_{k+1}} a_{\mu+(k+1)\delta_1-\delta_{i_1}-\ldots-\delta_{i_{k+1}}}.$$

Soient $i_1, \ldots, i_k$ des éléments arbitraires dans $\{1, \ldots, n\}$, alors $a_{\mu+(k+1)\delta_1-\delta_{i_1}-\ldots-\delta_{i_{k+1}}} = 0$. En effet: si on pose $\mu' = \mu+(k+1)\delta_1 - \delta_{i_1} - \ldots - \delta_{i_{k+1}}$, on aura: $|\mu'| = |\mu| = k$ et $|\mu'|_1 = |\mu|_1 + k + 1 > k$. D'où il existe un indice i pour lequel on a $|\mu'|_i < 0$. C'est à dire que $\mu' \in \mathbf{Z}^n \backslash \mathbf{N}^n$. Donc $a_{\mu'} = 0$, d'où on tire:

$$a_1^{(k+1)} a_\mu = 0$$

On peut faire le même travail pour tous les autres indices et on trouve le résultat suivant:

$$a_i^{(k+1)} a_\mu = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \tag{$***$}$$

Ceci implique que $a_\mu = 0$ car on a pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$, $a_i^{k+1}(\mathbf{C}a_\mu) \subset \{0\}$ et est donc borné. Mais $(a_1, \ldots, a_n)$ n'est pas formé d'éléments bornants joints. D'où $\mathbf{C}a_\mu$ est borné et par suite $a_\mu = 0$ (car β est séparée).
Nous avons montré donc que $a_\mu = 0$ $\forall \mu :\ |\mu| \geq (k-1)+1$. Et d'après l'hypothèse faite sur k, on conclut que $k = p$ et par suite $a_\mu = 0$ $\forall \mu :\ |\mu| \geq p$. ∎

Lemme 2. *Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ un n-uplet d'éléments non bornants joints de A. Posons $I = (e - \sum_{i=1}^{n} a_i X_i) A[X]$. Alors I est bornologiquement fermé dans $(A[X], \beta')$.*

Preuve. Soit $(P_m)_m$ une suite de $A[X]$ telle que $((e - \sum_{i=1}^{n} a_i X_i) P_m)_m$ converge bornologiquement vers un polynôme P. Ecrivons: $P_m = \sum_{\mu\in\mathbf{Z}^n} a_\mu^m X^\mu$ et $P =$

$\sum_{\mu\in\mathbf{Z}^n} a_\mu X^\mu$. On a: $\{(e - \sum_{i=1}^n a_i X_i)P_m / m \in \mathbf{N}\}$ est borné, donc contenu dans un certain $W_p(B_0, \dots, B_p)$. Et par suite tous les a_μ^m, où $m \in \mathbf{N}$, sont nuls pour tout μ vérifiant $|\mu| \geq p$. De plus la convergence bornologique de $(P_m)_m$ vers P implique les convergences bornologiques suivantes:

$$\begin{array}{rcll} a^m_{(0,\dots,0)} & \longrightarrow & a_{(0,\dots,0)} & (*) \\ a^m_\mu - \sum_{i=1}^n a_i a^m_{\mu-\delta_i} & \longrightarrow & a_\mu \quad \forall\mu : |\mu| \leq p & (**) \end{array}$$

Montrons que pour tout μ, on a $(a_\mu^m)_m$ converge bornologiquement vers un certain b_μ:

- Si $\mu \in \mathbf{Z}^n \backslash \mathbf{N}^n$, alors $a_\mu^m = 0$. Et par suite (a_μ^m) converge vers 0.
- Si $\mu \in \mathbf{N}^n$, alors $|\mu| \geq 0$. Pour $|\mu| = 0$ le résultat est fourni par $(*)$. Soit maintenant k un entier naturel inférieur où égal à p, et supposons que pour tout μ tel que $|\mu| = k - 1$, $(a_\mu^m)_m$ converge bornologiquement vers un certain b_μ. Prenons μ tel que $|\mu| = k$. Alors pour tout i, $(a^m_{\mu-\delta_i})_m$ converge vers $a_{\mu-\delta_i}$ car $|\mu - \delta_i| = k - 1$. Et d'après $(**)$, on conclut que $(a_\mu^m)_m$ converge vers b_μ où $b_\mu = a_\mu + \sum_{i=1}^n a_i b_{\mu-\delta_i}$.
- Si $|\mu| \geq p$, alors $a_\mu^m = 0$ d'après le lemme 1.

Ceci montre que (P_m) converge bornologiquement vers P', où $P' = \sum_{\mu\in\mathbf{Z}^n} b_\mu X^\mu$. On aura alors:

$$\begin{array}{rcl} (e - \sum_{i=1}^n a_i X_i)P_m & \longrightarrow & (e - \sum_{i=1}^n a_i X_i)P', \\ (e - \sum_{i=1}^n a_i X_i)P_m & \longrightarrow & P. \end{array}$$

Mais β' est séparée, d'où $P = (e - \sum_{i=1}^n a_i X_i)P' \in (e - \sum_{i=1}^n a_i X_i)A[X]$. Donc $I = (e - \sum_{i=1}^n a_i X_i)A[X]$ est b-fermé. ■

Sur $A' = A[X]/(e - \sum_{i=1}^n a_i X_i)A[X]$ on considére la bornologie quotient $\tilde{\beta}$. Une base de cette bornologie est donnée par:

$$\{W_p(B_0, \dots, B_p) + (e - \sum_{i=1}^n a_i X_i)A[X] : \\ p \in \mathbf{N} \text{ et } B_0, \dots, B_n \text{ sont des borné équilibrés de } A\}$$

Alors $(A', \tilde{\beta})$ est une algèbre bornologique (la séparation découle du lemme 2).

Lemme 3. *$(A', \tilde{\beta})$ est une extension bornologique de (A, β).*

Preuve. Il faut démontrer que:

1) l'application: $\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ a & \mapsto & \bar{a} \end{array}$ est injective; ce qui permet de considérer A comme une sous-algèbre de A'.

2) $\tilde{\beta}$ induit sur A exactement la bornologie β.

Soit donc $b \in A$ tel que $\bar{b} = \bar{0}$. Il existe alors $P(X) = \sum_{\mu\in\mathbf{Z}^n} a_\mu X^\mu \in A[X]$ tel que $b = (e - \sum_{i=1}^n a_i X_i)P(X)$. Notons B_0 l'envelope équilibré de $\{b\}$. Alors $(e - \sum_{i=1}^n a_i X_i)P(X) = b \in W_0(B_0)$. Donc d'après le lemme 1, $a_\mu = 0$ pour tout $\mu \in \mathbf{Z}^n$. C'est à dire $P = 0$, et par suite $b = 0$. D'où 1).

Montrons maintenant que $\tilde{\beta}$ induit sur A exactement la bornologie β de A. Pour celà, soit $\tilde{B} = W_p(B_0, \dots, B_p) + (e - \sum_{i=1}^{n} a_i X_i)A[X]$ un élément de $\tilde{\beta}$. Montrons que $\tilde{B} \bigcap A$ est un borné de A. Soit $b \in \tilde{B} \bigcap A$, donc il existe un polynôme $P(X) = \sum_{\mu \in \mathbf{Z}^n} a_\mu X^\mu$ tel que:

$$b + (e - \sum_{i=1}^{n} a_i X_i) P(X) \in W_p(B_0, \dots, B_p).$$

Où encore:

$$b + a_{(0,\dots,0)} + \sum_{1 \leq |\mu| \leq p} (a_\mu - \sum_{i=1}^{n} a_i a_{\mu - \delta_i}) X^\mu \in W_p(B_0, \dots, B_p)$$

car $a_\mu = 0\ \forall \mu :\ |\mu| \geq p$ (d'après le lemme 1). On obtient:

$$\begin{array}{llcll}
 & a_{(0,\dots,0)} + b & \in & B_0 & (0) \\
\text{si } |\mu| = 1 : & a_\mu - \sum_{i=1}^{n} a_i a_{\mu-\delta_i} & \in & B_1 & (1) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\text{si } |\mu| = p-1 : & a_\mu - \sum_{i=1}^{n} a_i a_{\mu-\delta_i} & \in & B_{p-1} & (p-1) \\
\text{si } |\mu| = p : & -\sum_{i=1}^{n} a_i a_{\mu-\delta_i} & \in & B_p & (p)
\end{array}$$

Pour $\mu = p\delta_1$, on trouve $a_1 a_{(p-1)\delta_1} \in B_p$ d'après (p) et d'après $(p-1)$ on a $a_{(p-1)\delta_1} - a_1 a_{(p-2)\delta_2} \in B_{p-1}$. Ceci donne: $a_1^2 a_{(p-2)\delta_2} \in B_p + a_1 B_{p-1}$. Et ainsi de suite on aboutit à:

$$a_1^p a_{(0,\dots,0)} \in B_p + a_1 B_{p-1} + \dots + a_1^{p-1} B_1$$

Le même travail peut se faire avec les autres indices:

$$a_i^p a_{(0,\dots,0)} \in B_p + a_i B_{p-1} + \dots + a_i^{p-1} B_1 \quad i = 1, \dots, n.$$

Posons $B_i' = B_p + a_i B_{p-1} + \dots + a_i^{p-1} B_1$ et $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i'$. Puisque les a_i, $i = 1, \dots, n$; ne sont pas des éléments bornants joints, alors pour B et p il existe un borné B' tel que: $a_i^p x \in B\ \ \forall i \Longrightarrow x \in B'$. On conclut que $a_{(0,\dots,0)} \in B'$ et par suite $b \in B_0 + B'$. Ceci permet de dire que $\tilde{B} \bigcap A \subset B_0 + B'$ qui est un borné de A. Donc tout élément de $\tilde{\beta}$ induit sur A un élément de β.
Il est clair que tout borné de A est un borné de A'. Donc A' est une extension bornologique de A. ■

Théorème 1. *Soient A une algèbre bornologique, I un idéal de A et $(a_1, \dots, a_n)$ un n-uplet d'éléments de I. Alors $(a_1, \dots, a_n)$ est* 𝔅*-régulier si, et seulement si, il n'est pas formé d'éléments bornants joints.*

Preuve. Montrons d'abord le sens direct. Supposons que $(a_1, \dots, a_n)$ est formé d'éléments bornants joints et qu'il existe une extension A' de A et $x_1, \dots, x_n$

dans A' tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = e$. Soient D non borné et $p \in \mathbf{N}$ tels que $a_i^p D$ soit borné pour tout i. On a:

$$D = (\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) D \subset \sum_{i=1}^{n} (a_i x_i D)$$

Alors $\sum_{i=1}^{n} (a_i x_i D)$ est non borné car il contient D. D'où il existe i_1 dans $\{1, \ldots, n\}$ tel que $a_{i_1} x_{i_1} D$ est non borné et alors $a_{i_1} D$ est aussi non borné. On refait la même chose avec $a_{i_1} D$:
$a_{i_1} D \subset \sum_{i=1}^{n} (a_i x_i (a_{i_1} D))$ d'où il existe $i_2 \in 1, \ldots, n$ tel que $a_{i_2} a_{i_1} D$ soit non borné.
Et par récurrence on montre que:

$$\forall k \in \mathbf{N}, \exists i_1, \ldots, i_k \subset \{1, \ldots, n\} \text{ tel que } a_{i_1} \ldots a_{i_k} D \text{ soit non borné.}$$

Pour $k \geq pn$, l'un de ces a_{i_j}, notons-le par exemple a_l, figure au moins p fois. $a_{i_1} \ldots a_{i_k} D$ peut se mettre alors sous la forme $a a_l^p D$ (où a est un élément de A tel que $a a_l^p = a_{i_1} \ldots a_{i_k}$).
$a a_l^p D$ est non borné implique que $a_l^p D$ est non borné, contrairement à l'hypothèse. Donc $(a_1, \ldots, a_n)$ ne peut être $\mathfrak{B}$-régulier.

Supposons que $(a_1, \ldots, a_n)$ n'est pas formé d'éléments bornants joints. Considérons l'algèbre A' définie comme dans les lemmes ci-dessus. Alors A' est une extension de A dans laquelle on a: $\overline{(e - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i)} = \bar{0}$. D'où $\bar{e} = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i \bar{X}_i$. Et donc $(a_1, \ldots, a_n)$ est $\mathfrak{B}$-régulier. ∎

Nous avons besoin du lemme suivant, bien connu dans la théorie des espaces vectoriels topologiques:

Lemme 4. *Soient E un espace vectoriel topologique métrisable et $(x_m)_m$ une suite de A convergente vers 0. Alors il existe une suite $(\lambda_m)_m$ dans $\mathbf{R}_+$ convergente vers $+\infty$ et telle que $(\lambda_m x_m)_m$ converge vers 0.*

Proposition 2. *La notion d'idéal formé d'éléments bornants joints coincide avec celle d'idéal formé de diviseurs topologiques joints de zéro dans le cas d'une algèbre de Banach (munie de sa bornologie de von Neumann).*

Preuve. Soient A une algèbre de Banach et I un idéal de A.

Si I est formé d'éléments bornants joints, alors I est $\mathfrak{B}$-non removable et par suite $\mathbf{B}$-non removable (car $\mathbf{B} \subset \mathfrak{B}$). I est donc formé de diviseurs topologiques joints de zéro.

Si I est formé de diviseurs topologiques joints de zéro: Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ un n-uplet d'éléments de I. Il existe un voisinage équilibré U de 0 et une suite $(x_m)_m$ dans $A \backslash U$ telle que $(a_i x_m)_m$ converge vers 0, $i = 1, \ldots, n$. D'après le lemme 4, il existe des suites $(\lambda_{m,i})_m$, $i = 1, \ldots, n$; dans $\mathbf{R}_+$ qui convergent vers $+\infty$ et telles que les $(\lambda_{m,i} a_i x_m)_m$ convergent vers 0. Posons pour tout entier m, $\lambda_m = \inf\{\lambda_{m,i},\ i = 1, \ldots, n\}$. Alors $(\lambda_m)_m$ converge vers $+\infty$ et $(\lambda_m a_i x_m)_m$ converge vers 0.

Posons $D = \{\lambda_m x_m,\ m \in \mathbf{N}\}$. Alors D est non borné. (Sinon, il existe un $\alpha \leq 1$ tel que $\alpha D \subset U$. Ce qui donne $\alpha\lambda_m < 1$ pour tout m (car U est équilibré et $(x_m)_m$ est contenue dans $A\backslash U$). Mais ceci est impossible car (λ_m) tend vers $+\infty$. Donc D est non borné.).
$(\lambda_m a_i x_m)_m$ converge vers 0 implique que $a_i D$ et borné pour $i = 1, \ldots, n$. Donc $(a_1, \ldots, a_n)$ est formé d'éléments bornants joints, d'où le résultat cherché. ∎

Définition 3. - Une famille (I_j) d'idéaux de A est dite $\mathfrak{B}$-removable, s'il existe une extension A' de A qui remove tous les I_j.

Théorème 2. *Toute famille finie d'idéaux $\mathfrak{B}$-removables est $\mathfrak{B}$-removable.*

Preuve. Soit $\{I_1, \ldots, I_n\}$ un ensemble fini d'idéaux $\mathfrak{B}$-removables de A. Alors pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, il existe un r_k-uplet $\mathfrak{B}$-régulier $(a_{1,k}, \ldots, a_{r_k,k})$ d'éléments de I_k. D'après la proposition 1, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, tout borné B de A et tout entier naturel p, il existe un borné de A noté $B'_{(B,p,k)}$ tel que:

$$\forall x \in A \ \ (a_{i,k}^p x \in B \ \ \forall i \in \{1, \ldots, r_k\}) \Longrightarrow x \in B'_{(B,p,k)}$$

Posons $R = \{1, \ldots, r_1\} \times \{1, \ldots, r_2\} \times \ldots \times \{1, \ldots, r_n\}$. Et pour tout $r = (i_1, \ldots, i_n)$ dans R, $b_r = \prod_{j=1}^n a_{i_j,j} = a_{i_1,1} a_{i_2,2} \ldots a_{i_n,n}$.
Alors, les b_r, quand r parcourt R, ne sont pas des éléments bornants joints. En effet:
Soit B un borné de A, $p \in \mathbf{N}$ et $x \in A$ tels que:

$$b_r^p x = a_{i_1,1}^p a_{i_2,2}^p \ldots a_{i_n,n}^p x \in B \ \ \forall r \in R.$$

Cette relation reste donc vraie si on fait varier i_1 dans $\{1, \ldots, r_1\}$ en laissant $i_2, i_3, \ldots, i_n$ fixes. Ceci implique que:

$$a_{i_2,2}^p a_{i_3,3}^p \ldots a_{i_n,n}^p x \in B'_{(B,p,1)} \quad \text{(on pose: } B'_1 = B'_{(B,p,1)})$$

Dans cette dérnière relation, $(i_2, \ldots, i_n)$ est arbitraire dans $\prod_{j=2}^n \{1, \ldots, r_j\}$. Donc elle est vraie si on fixe $i_3, \ldots, i_n$ et on fait varier i_2 dans $\{1, \ldots, r_2\}$. Ceci implique que:

$$a_{i_3,3}^p \ldots a_{i_n,n}^p x \in B'_{(B'_1,p,2)} \quad \text{(on pose: } B'_2 = B'_{(B'_1,p,2)})$$

Et ainsi de suite, on montre qu'il existe un borné B'_{n-1} de A tel que:

$$a_{i_n,n}^p x \in B'_{n-1} \ \ \forall\, i_n \in \{1, \ldots, r_n\}$$

En posant $B'_{(B'_{n-1},p,n)} = B'$, on conclut que $x \in B'$.
On a donc montré que pour tout borné B et tout entier p,il existe un borné B' qui vérifie avec B, p,et les b_r, $r \in R$, la relation $(*)$ de la proposition 1. Ce qui signifie que $\{b_r,\ r \in R\}$ n'est pas formé d'éléments bornants joints. Il existe alors

une extension A' de A qui remove l'idéal I engendré par $\{b_r,\ r \in R\}$. Mais I est contenu dans $\bigcap_{k=1}^{n} I_k$. D'où A' remove tous les I_k, $k = 1, \dots, n$. ∎

On voit donc que dans la classe $\mathfrak{B}$, on a des résultats analogues à ceux de la classe **B**.

References

[1] R. Arens, *Inverse-producing extensions of normed algebras*, Trans. Amer. Math. Soc.**88** (1958), 536–548.

[2] B. Bollobás, *Adjoining inverses to commutative Banach algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **181** (1973), 165–174.

[3] A. Fernandez, M. Florencio, P.J. Paul et V. Müller, *Extensions of topological algebras*, Collect. Math. **40** (1989), 55–65.

[4] V. Müler, *Non-removable ideals in comutative Banach algebras*, Studia Math. **74** (1982), 97–104.

[5] A. Tajmouati et A. Zinedine, *Eléments singuliers permanents dans la classe des algèbres bornologiques*, Functiones et Approximatio **27** (1999), 31–38.

[6] W. Żelazko, *Concerning a characterization of permanently singular elements in commutative locally convex algebras*, Math. structures- computational mathematics- mathematical modeling, 2, Sofia, (1984), 326–333.

[7] W. Żelazko, *On non-removable ideals in commutative locally convex algebras*, Studia. Math. **77** (1983), 133–154.

[8] W. Żelazko, *Selected topics in topological algebras*, Lecture Notes Series **31** (1971), Mathematisk Institut, Aarhus Universitet, Aarhus.

Address: Mohammed AKKAR, Université de Bordeaux I, U. F. R. de mathématiques et informatique, 351, Cours de la libération, F 33405 TALENCE-CEDEX, FRANCE;
Abdelaziz TAJMOUATI et Ahmed ZINEDINE, Université S. M. Ben Abdellah Département de mathématiques et informatique, Faculté des sciences Dhar-Mehraz, B. P. 1796 Fès-Atlas, FES MAROC

Received: 10 December 1999