Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa
Wykład 1: klasyczna definicja prawdopodobieństwa

$\Omega = \{\omega_i : i \in I\}$- zbiór zdarzeń elementarnych, ω_i- zdarzenie elementarne, $i \in I$. Gdy $|I| < \infty$ oraz $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$, dla każdego $\omega \in \Omega$, to

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Przydatne własności $\mathbb{P}$ - dla dowolnych $A, B \subset \Omega$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c), \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Przydatne wzory kombinatoryczne:

- $\binom{n}{k}$ – liczba k – elementowych podzbiorów zbioru n – elementowego;
- n^k – liczba ciągów długości k o wyrazach wybranych ze zbioru n–elementowego;
- $(n)_k = n \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ – liczba ciągów długości k bez powtarzających się wyrazów wybranych ze zbioru n–elementowego;
- $n!$ – liczba permutacji zbioru n–elementowego.

Dodatek A. Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1. Rzucamy dwiema symetrycznymi monetami. Interesuje nas wyłącznie liczba orłów, zatem przyjmujemy $\Omega = \{0, 1, 2\}$. Czy przyjęcie $\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{3}$, $k = 0, 1, 2$, daje model dobrze opisujący doświadczenie?

Zadanie A.2. Tworzymy losowo słowo o długości 7 (niekoniecznie mające sens) z liter: a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n. Z jakim prawdopodobieństwem litery w słowie nie bedą się powtarzać?

Zadanie A.3. Jaka jest szansa, że przy n–krotnym rzucie standardową kostką do gry

(a) wypadną dokładnie trzy szóstki?
(b) wypadną przynajmniej trzy szóstki?

Zadanie A.4. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zapisując losowo każdego z s ($s \geqslant 2$) studentów do jednej z k grup ćwiczeniowych $G_1, \ldots G_k$ ($k \geqslant 2$), sprawimy, że

(a) żadna z dwóch pierwszych grup nie będzie pusta?
(b) pierwsza lub ostatnia grupa będzie pusta?

Zadanie A.5. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w dobrze potasowanej talii (52 karty) wszystkie 4 asy sąsiadują ze sobą (tzn. nie są rozdzielone innymi kartami)?

Zadanie A.6. Rozdano 52 karty czterem graczom, po 13 kart każdemu. Jaka jest szansa, że każdy ma asa?

Zadanie A.7. Z tradycyjnej talii 24 kart wybieramy pięć. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania następujących układów: jedna para (i nic więcej), dwie pary (i nic więcej).

Dodatek B. Zadania domowe (podobne zadania będą na kartkowce 5. i 7. marca!)

Zadanie B.1. Oblicz prawdopodobieństwo, że w 5–osobowej delegacji wybranej losowo z klasy liczącej 15 dziewcząt i 16 chłopców, znajdzie się 3 chłopców.

Zadanie B.2. W urnie są 2 kule białe i 4 czarne. Losujemy 2 kule bez zwracania. Co jest bardziej prawdopodobne, wyciągnięcie a) kul tego samego koloru; b)różnych kolorów?

Zadanie B.3. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany ciąg binarny (składający się z „0” i „1”) długości 15 ma dokładnie 10 zer.

Zadanie B.4. Rzucamy n razy ($n \geqslant 9$) standardową kostką do gry. Jaka jest szansa, że wypadnie dokładnie sześć jedynek, trzy czwórki i poza tym inne wartości?

Zadanie B.5. Do n różnych urn wrzucamy losowo k różnych kulek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że

(a) w każdej urnie będzie co najwyżej jedna kulka (zakładamy tutaj, że $k \leqslant n$)?
(b) w pierwszej urnie będą co najwyżej 2 kule?
(c) w ostatniej urnie będą co najmniej 2 kule?

Zadanie B.6. Leszek i Olek losują, kto zapłaci za obiad. Leszek wziął dwie krótkie i dwie długie zapałki i kazał koledze wylosować (bez zwracania) dwie, mówiąc „jeśli wylosujesz krótszą i dłuższą, to płacisz, a w przeciwnym razie – ja”. Jaka jest szansa, że Olek zapłaci za obiad?

Zadanie B.7. Dzielimy talię 52 kart na dwie równe części. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

(a) w obu częściach będą po 2 asy,
(b) w jednej z części będą 3 asy.

Zadanie B.8. Rzucamy 5 razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo, że uzyskamy dokładnie dwie różne wartości (np. 2,4,2,2,4).