Wstęp do rachunku prawdopobieństwa
Powtórka przed końcowym egzaminem

Zadanie 1. Ze zwykłej talii 52 kartowej wyciągamy równocześnie 3 karty. Znajdź prawdopodobieństwo:

(i) zdarzenia A, żę wylosujemy dokładnie 2 piki i jednego asa;
(ii) zdarzenia B, że wylosujemy co najmniej 2 asy.

Czy zdarzenia A i B są niezależne?

Zadanie 2. Urna zawiera 3 białe i 2 czarne kule. Z urny wylosowujemy trzy różne kule i następnie je wyrzucamy. Potem wylosowujemy jeszcze jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w pierwszej rundzie wyrzuciliśmy trzy białe kule, gdy wylosowana w drugiej rundzie kula jest czarna?

Zadanie 3. Ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$ wylosowujemy parę różnych liczb $\{a, b\}$, przy czym każda z trzech możliwych par losowana jest z tym samym prawdopodobieństwem. Niech $X = a + b$ i $Y = a \cdot b$.

(a) Znajdź łączny rozkład zmiennej losowej (X, Y) i rozkłady brzegowe zmiennych X i Y.
(b) Znajdź rozkłąd zmiennej losowej $Z = |X| - 1$.
(c) Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?
(d) Oblicz współczynnik korelacji $\rho(X, Y)$.

Zadanie 4. Zmienna losowa X ma rozkład ciągły o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} cx & \text{dla } x \in (-1, 2), \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}.$$

(a) Znajdź wartość stałej c.
(b) Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej X.
(c) Znajdź $\mathbb{E}X$ i $\mathrm{Var}X$.
(d) Oblicz $\mathbb{P}\left(X \in (-2, 1/2] \cup [1, 4]\right)$.

Zadanie 5. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość

$$f_{X,Y} = \begin{cases} 12x^2 & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}.$$

(a) Znajdź gęstości (brzegowe) X i Y.
(b) Czy X and Y są niezależne?
(c) Znajdź Var$X$.

Zadanie 6. Ania i Frania codziennie jedzą śniadanie w jednym z dwóch barów mlecznych, o nazwach *Kefirek* i *Jogurcik*. Ania nie lubi Frani i dlatego, jesli spotka ją w barze, następnego ranka odwiedza drugi bar, natomiast jeśli jej nie spotka, z prawdopodobieństwem 2/3 idzie do baru, w którym jadła śniadanie poprzedniego dnia, a z prawdopodobieństwem 1/3 odwiedza drugi bar. Frania lubi Anię i kiedy spotka ją przy śniadaniu, następnego ranka przyjdzie do tego samego baru. Jeśli Ani nie spotka, z prawdopodobieństwem 1/3 idzie do baru, w którym jadła śniadanie poprzedniego dnia, a z prawdopodobieństwem 2/3 odwiedza drugi bar. Wiemy, że 2 lutego Ania poszła do *Kefirka*, a Frania do *Jogurcika*. Oszacuj prawdopobieństwo, że 27 listopada zarówno Ania jak i Frania zjedzą śniadanie w *Jogurciku*.

Zadanie 7. Z przedziału $[0, 1]$ losujemy 30000 razy jeden punkt, przy czym każdy z punktów jest jednakowo prawdopodobny. Zastosuj

(a) nierówność Czebyszewa,
(b) Centralne Twierdzenie Graniczne,

do oszacowania z góry prawdopodobieństwa, że co najmniej 7700 razy wylosujemy liczbę z przedziału $[1/2, 3/4]$.