

Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa Mała powtórka przed drugim kolokwium

Zadanie 1. Ze zbioru $\{0, 1, 2\}$ wylosowujemy parę różnych liczb $\{a, b\}$, przy czym każda z trzech możliwych par losowana jest z tym samym prawdopodobieństwem. Niech $X = a + b$ i $Y = a \cdot b$.

- (a) Znajdź łączny rozkład zmiennej losowej (X, Y) i rozkłady brzegowe zmiennych X i Y .
- (b) Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?
- (c) Oblicz współczynnik korelacji $\rho(X, Y)$.
- (d) Wylicz $\mathbb{E}(X^2 + 2XY^3)$.

Zadanie 2. Zmienna losowa X ma rozkład ciągły o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{dla } x \in (-1, 2), \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

- (a) Znajdź wartość stałej c .
- (b) Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej X .
- (c) Znajdź $\mathbb{E}X$ i $\text{Var}X$.
- (d) Oblicz $\mathbb{P}(X \in (-2, 1/2] \cup [1, 4])$.

Zadanie 3. Jeżyk Anatol spędza całe dni wylegując się pośród trzech, rosnących w ogrodzie, drzew. Co kwadrans decyduje o kolejnym miejscu odpoczynku. Jeśli siedzi pod jabłónką, z prawdopodobieństwem $1/2$ przechodzi pod gruszę, a z prawdopodobieństwem $1/2$ pod śliwę. Gdy siedzi pod gruszą, na następne miejsce pobytu z równym prawdopodobieństwem $1/3$ wybiera jabłónkę, śliwę lub gruszę. Siedząc pod śliwą, z prawdopodobieństwem $1/3$ zostaje na miejscu, a z prawdopodobieństwem $2/3$ idzie pod gruszę. Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo, że po 300 kwadransach cierpliwy Anatol znajdzie się pod gruszą? Błąd przybliżenia jest nieistotny.

Zadanie 4. Z przedziału $[0, 1]$ losujemy 30000 razy jeden punkt, przy czym każdy z punktów jest jednakowo prawdopodobny. Zastosuj

- (a) nierówność Czebyszewa,
- (b) Centralne Twierdzenie Graniczne,

do oszacowania z góry prawdopodobieństwa, że co najwyżej 7400 razy wylosujemy liczbę z przedziału $[1/2, 3/4]$.

Przypomnienie: Wariancja zmiennej losowej o rozkładzie dwumianowym $B(n, p)$ wynosi $p(1 - p)n$.

Uwaga: Aby rozwiązać to zadanie muszą Państwo skorzystać z tablic rozkładu normalnego. Jeśli podobne zadanie znajdzie się na kolokwium, podamy Państwu odpowiednie wartości funkcji Φ , albo wydrukujemy odpowiednie tablice.