Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa
Wykład 13: Gry o sumie zerowej.

Definicja. Gra o sumie zerowej *między dwoma osobami to trójka* (X, Y, A), *gdzie* $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ *jest zbiorem czystych strategii pierwszego gracza,* $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ *jest zbiorem czystych strategii drugiego gracza, a* $A = [a_{ij}]$ *jest macierzą wypłat, w której* a_{ij} *oznacza wygraną pierwszego gracza (czyli przegraną drugiego gracza), gdy pierwszy z nich stosuje strategię* x_i, *a drugi* y_j.

Definicja. Strategią mieszaną *dla pierwszego gracza, którego zbiór czystych strategii to* $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, *nazywamy wektor* $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, *gdzie* p_i *oznacza prawdopodobieństwo, że pierwszy gracz gra zgodnie ze strategią* x_i. *Podobnie definiujemy strategie mieszaną* $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)$ *dla drugiego gracza.*

Twierdzenie (Twierdzenie o minimaksie). *Dla każdej gry o sumie zerowej* (X, Y, A) *istnieje taka liczba* V, *zwana* **wartością** *tej gry, że*

- *pierwszy gracz ma strategie mieszaną* $\mathbf{p}$ *gwarantującą, że wartość oczekiwana jego wygranej będzie równa przynajmniej* V, *bez względu na to jak będzie grał gracz pierwszy,*
- *drugi gracz ma strategie mieszaną* $\mathbf{q}$ *gwarantującą, że wartość oczekiwana jego przegranej będzie równa co najwyżej* V, *bez względu na to jak grał będzie gracz drugi.*

Każda strategia pierwszego [drugiego] gracza, dla której wartość oczekiwana wygranej [przegranej] jest większa lub równa [mniejsza lub równa] od wartości gry V, *przy dowolnej strategii przeciwnika. nazywamy strategią optymalną.*

Fakt. Jeśli gra (X, Y, A) ma **punkt siodłowy**, tzn. macierz A zawiera element a_{ij} taki, że a_{ij} jest równocześnie najmniejszym elementem w i-tym wierszu i największym elementem w j-tej kolumnie, to strategie czyste x_i i y_j są optymalne dla graczy, a wartość gry wynosi a_{ij}.

Fakt. Jeśli wiersz i macierzy A jest majoryzowany przez wiersz i', tzn. dla każdego indeksu j zachodzi $a_{ij} \leqslant a_{i'j}$, to dla pierwszego gracza istnieje optymalna strategia nie używająca strategi czystej x_i i wartość (X, Y, A) jest taka sama jak gry $(X^{(-i)}, Y, A^{(-i)})$, gdzie $X^{(-i)} = X \setminus \{x_i\}$, a macierz $A^{(-i)}$ powstaje z usunięcia i-tego wiersza macierzy A. Podobna własność zachodzi, gdy kolumna j jest majoryzowana przez kolumnę j'.

Twierdzenie. *Niech* (X, Y, A) *oznacza grę, w której każdy gracz ma dwie strategie, która ponadto nie zawiera punktu siodłowego. Wtedy, aby obliczyć optymalną strategię* $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ *dla pierwszego gracza musimy wybrac* p_1 *i* p_2 *tak by średnie wygrane pierwszego gracza były równe dla obu czystych strategii przeciwnika, tzn.* p_1 *i* p_2 *sa rozwiązaniem układu równań*

$$\begin{cases} p_1 a_{11} + p_2 a_{21} = p_1 a_{12} + p_2 a_{22} \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}.$$

W podobny sposób możemy znaleźć optymalną strategię dla drugiego gracza $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$, *tym razem rozwiązując równanie*

$$\begin{cases} q_1 a_{11} + p_2 a_{12} = q_1 a_{21} + q_2 a_{22} \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}.$$

1. Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Średnica sekwoi wzrasta od 1 do 2 cm rocznie, przy czym każdy przyrost pomiędzy 1 i 2 cm jest jednakowo prawdopodobny. Oszacuj prawdopodobieństwo, że w ciągu 300 lat średnica zwiększy się o co najmniej 460cm, stosując: (i) nierówność Markowa, (ii) nierówność Czebyszewa, (iii) Centralne Twierdzenie Graniczne.

Zadanie 2. Rzucamy symetryczną kostką 100 razy. Oszacuj prawdopodobieństwo, że wyrzucimy szóstkę mniej niż 10 razy, stosując:

(i) twierdzenie Czebyszewa, (ii) CTG bez poprawki 1/2, (iii) CTG z poprawką 1/2.

Czy możemy oszacować to prawdopodobieństwo, stosując twierdzenie Markowa?

Stosując CTG, oszacuj prawdopodobieństwo wyrzucenia 10 szóstek i porównaj je z rzeczywistą wartością tego prawdopodobieństwa.

Zadanie 3. Kierowniczka urzędu pocztowego twierdzi, że w jej placówce klient czeka w kolejce do okienka krócej niż 15 minut. Dociekliwa ekipa telewizyjna chce zweryfikować jej deklarację, mierząc średni czas obsługi 50 klientów. Jaka jest prawdopodobieństwo, że potwierdzi ona deklarację kierowniczki urzędu, jeśli wiadomo, że rzeczywisty czas stania w kolejce T jest ciągłą zmienną losową taką, że $\mathbb{E}T = 14$ i $\mathrm{Var}T = 23$? Czy należy stosować w tym przypadku "poprawkę 1/2"?

Przypuśćmy, że ekipa telewizyjna zapytała uprzednio kierowniczkę, czas ilu kolejnych klientów należy zmierzyć. Co powinna ona odpowiedzieć, by mieć 99% pewność, że wyliczenia ekipy nie obalą jej twierdzenia?