Teoretyczne podstawy informatyki
Wykłady VII. Przepływy w sieciach.

Wprowadzone pojęcia: Sieć, źródło, ujście, przepływ w sieci, cięcie, wartość przepływu, pojemność cięcia.

Podstawowe definicje i twierdzenia

Definicja. Wartością przepływu f, *oznaczaną jako* $\mathrm{val}(f)$, *nazywamy sumę wartości przepływu na strzałkach wychodzących ze źródła. Równoważnie można ją zdefiniować jako sumę wartości przepływu na strzałkach dochodzących do ujścia.*

Definicja. Pojemnością cięcia $(S, \bar{S})$, *oznaczaną jako* $\mathrm{cap}(S, \bar{S})$, *nazywamy sumę pojemności strzałek wychodzących z* S*, tzn. strzałek o początku w* S *i końcu w* $\bar{S}$.

Podstawowym twierdzeniem teorii przepływów jest rezultat łączący maksymalny przepływ z minimalnym cięciem w sieci.

Twierdzenie (MAX-FLOW-MIN-CUT)**.**

$$\max_f \mathrm{val}(f) = \min_{(S,\bar{S})} \mathrm{cap}(S, \bar{S}),$$

gdzie maksimum jest wzięte po wszystkich przepływach, a minimum po wszystkich cięciach w sieci.

Zauważmy, że jeśli $f_{\max}$ jest maksymalnym przepływem, a $(S_{\min}, \bar{S}_{\min})$ minimalnym cięciem, to na każdej strzałce wychodzącej z $S_{\min}$ przepływ $f_{\max}$ jest taki jak pojemność tej strzałki, a na każdej strzałce wchodzącej do $S_{\min}$ przepływ $f_{\max}$ wynosi zero.

Okazuje się, że maksymalny przepływ można dość szybko znaleźć.

Fakt. Istnieją algorytmy, które w czasie wielomianowym znajdują maksymalny przepływ w sieci.

Co więcej, większość z tych algorytmów ma następującą własność, kluczową dla wielu zastosowań:

> *jeśli pojemność każdej strzałki w sieci jest liczbą całkowitą, to znaleziony maksymalny przepływ na każdej strzałce przyjmuje wartości całkowite.*