Teoretyczne podstawy informatyki
Wykład VIII. Łańcuchy Markowa. Macierz przejścia.

Wprowadzone pojęcia: przestrzeń stanów, łańcuch Markowa, macierz przejścia, łańcuch nieprzywiedlny, łańcuch okresowy, rozkład stacjonarny.

Podstawowe twierdzenia

Twierdzenie 1. *Niech* $\Pi = [p_{ij}]$ *będzie macierzą przejścia,* $\Pi^{(k)} = [p_{ij}^{(k)}]$ *macierzą przejścia w* k *krokach, a* $\rho^{(n)} = [\rho_i^{(n)}]$ *rozkładem zmiennej losowej* X_n *dla łańcucha Markowa* $X_0, X_1, \dots$ *. Wtedy*

$$\Pi^{(k)} = \Pi^k,$$

i

$$\rho^{(n+1)} = \rho^{(n)}\Pi,$$

a ogólniej

$$\rho^{(n+k)} = \rho^{(n)}\Pi^{(k)} = \rho^{(n)}\Pi^k.$$

Twierdzenie 2. *Każdy łańcuch Markowa o skończonej liczbie stanów ma przynajmniej jeden stan stacjonarny, tzn. istnieje przynajmniej jeden wektor* $\pi = [\pi_i]$ *o współrzędnych nieujemnych taki, że*

$$\pi = \pi\Pi \quad i \quad \sum_i \pi_i = 1\,.$$

Kącik informatyka

Łańcuchy Markowa są jednym z podstawowych narzędzi współczesnej informatyki. Jednym z ich standardowych zastosowań są metody Monte-Carlo, gdy musimy wybrać (lub wygenerować) losowo pewien obiekt z danej rodziny obiektów $\mathcal{A}$. Typową metodą postępowania w takiej sytuacji jest wybranie jednego obiektu z $\mathcal{A}$ i jego losowa modyfikacja tak, by otrzymany obiekt wciąż należał do $\mathcal{A}$. Jeśli zrobimy to dostatecznie umiejętnie, po stosunkowo niewielu losowych zmianach otrzymamy obiekt, który, w dobrym przybliżeniu, może być uznany za losowy element rodziny $\mathcal{A}$.