## Oznaczenia

$\tau(G)$: liczba drzew rozpiętych w grafie $G$
$\Pi$: macierz przejścia łańcucha Markowa
$p_{ij}^{(n)}$: prawdopodobieństwo przejścia ze stanu $i$ do stanu $j$ w $n$ krokach
$\mathbb{F}_q$: ciało o $q$ elementach
$val(f)$: wartość przepływu $f$
$cap(S,\bar{S})$: pojemność cięcia $(S,\bar{S})$

W **błądzeniu klasycznym** na grafie $G$ w każdym kroku przemieszczamy się do sąsiada wierzchołka, w którym aktualnie jesteśmy, przy czym wybieramy sąsiada w sposób jednostajny (każdy sąsiad jest wybrany z jednakowym prawdopodobieństwem). W błądzeniu klasycznym nie ma postojów.

## Wybrane twierdzenia

**Twierdzenie 1.** *Jeśli $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ są wartościami własnymi macierzy przyległości $A$ $d$-**regularnego** grafu $G$ na $n$ wierzchołkach, to:*
*(a) $\lambda_1 = d$ i odpowiada jej przykładowy wektor własny złożony z samych jedynek.*
*(b) $G$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_1 > \lambda_2$.*
*(c) $\mu_i = d - \lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, są wartościami własnymi laplasjanu tego grafu.*

**Twierdzenie 2.** *Jeśli $\mu_n \geqslant \mu_{n-1} \geqslant \ldots \geqslant \mu_1 = 0$ są wartościami własnymi laplasjanu $L$ grafu $G$ na $n$ wierzchołkach, a $\tau(G)$ oznacza liczbę drzew rozpiętych tego grafu, to*
*(a) $\tau(G) = \frac{1}{n}\mu_n\mu_{n-1}\ldots\mu_2$.*
*(b) $\tau(G)$ jest równe wartości bezwzględnej dowolnego minora laplasjanu $L$.*
*(c) $MAXCUT \leqslant \frac{\mu_n n}{4}$.*

**Twierdzenie 3.** *Jeżeli pojemności wszystkich krawędzi sieci są całkowite, to istnieje maksymalny przepływ, którego wszystkie wartości na krawędziach są całkowite.*

**Twierdzenie 4.** *W każdej standardowej sieci $\max_f val(f) = \min_{(S,\bar{S})} cap(S,\bar{S})$.*

**Twierdzenie 5.** *Jeśli $\Pi$ jest macierzą przejścia łańcucha Markowa, to $\Pi^t$ jest macierzą przejścia w $t$ krokach ($t \in \mathbb{N}$).*

**Twierdzenie 6.** *Niech $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ będzie łańcuchem Markowa o macierzy przejścia $\Pi$, a $\rho^i$ oznacza rozkład zmiennej losowej $X_i$, dla $i = 0, 1, \ldots$. Wtedy dla każdego $t \in \mathbb{N}$ zachodzi: $\rho^t = \rho^{t-1}\Pi$, $\rho^t = \rho^0\Pi^t$, a ogólniej $\rho^{t+k} = \rho^t\Pi^k$.*

**Twierdzenie 7.** (Twierdzenie ergodyczne) *Skończony, nieprzywiedlny i nieokresowy łańcuch Markowa posiada dokładnie jeden rozkład stacjonarny $(\pi_j)$ oraz $p_{ij}^{(n)} \to \pi_j$ przy $n \to \infty$, dla wszystkich stanów $i, j$.*

**Twierdzenie 8.** *Błądzenie klasyczne na grafie $G$ posiada rozkład stacjonarny $(\pi_u)_{u\in V(G)}$ postaci $\pi_u = \frac{deg(u)}{\sum_{v\in V(G)} deg(v)}$.*

**Twierdzenie 9.** *Jeżeli $a_i p_{ij} = a_j p_{ji}$ dla wszystkich stanów $i, j \in S$ oraz $(a_i)_{i\in S}$ jest wektorem nieujemnym i niezerowym, to $\left(\frac{a_i}{\sum_{j\in S} a_j}\right)_{i\in S}$ jest rozkładem stacjonarnym łańcucha Markowa i łańcuch ten nazywamy odwracalnym.*

*W szczególności, jeśli dla każdej pary stanów $i, j \in S$ mamy $p_{ij} = p_{ji}$, to rozkład jednostajny, w którym prawdopodobieństwo każdego stanu jest równe $1/|S|$, jest rozkładem stacjonarnym tego łańcucha.*

**Twierdzenie 10.** *Moc każdego skończonego ciała jest potęgą liczby pierwszej. Dla każdej liczby pierwszej $q$ i naturalnej liczby $n$ istnieje ciało o mocy $q^n$.*

**Twierdzenie 11.** *Dla każdego kodu $C \subseteq \mathbb{F}_q^n$ o rozstępie $2t+1$ zachodzi*

$$q^n \geqslant |C| \sum_{j=0}^{t} \binom{n}{j} (q-1)^j.$$

*Kod $C \subseteq \mathbb{F}_q^n$ o rozstępie $2t+1$ jest doskonały wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$q^n = |C| \sum_{j=0}^{t} \binom{n}{j} (q-1)^j.$$

**Twierdzenie 12.** *Rozstęp kodu liniowego jest równy najmniejszej wadze spośród wag niezerowych słów kodu.*

**Twierdzenie 13.** *Jeśli macierz generująca kodu długości $n$ ma postać $G = [I_k, M]$, to $H = [-M^T, I_{n-k}]$ jest przykładową macierzą parzystości tego kodu. $I_j$ oznacza macierz jednostkową $j \times j$.*