TPI – 12

Kody

Zadania domowe, przygotowujące do kartkówki

We wszystkich zadaniach „odległość” oznacza odległość Hamminga. Q oznacza niepusty zbiór skończony.

A1. Dany jest kod C nad alfabetem Q, składający się ze słów: $(0,1,0,1)$, $(1,0,1,1)$, $(0,0,0,0)$, $(1,1,1,0)$.

(a) Dla $y=(1,0,0,1)$ wyznacz jego odległość do najbliższego słowa kodu, czyli $\min_{x\in C} d(y,x)$. Czy tu istotne jest, nad jakim alfabetem Q określony jest kod C?

(b) Znajdź rozstęp kodu C. Czy dla określenia rozstępu istotne jest, jaki jest alfabet Q?

(c) Załóżmy, że C jest kodem binarnym, tzn. $Q=\{0,1\}$. Wypisz wszystkie elementy kuli Hamminga w przestrzeni Q^4, o środku w wybranym przez siebie słowie kodu i o promieniu 2. Czy dla liczby tych elementów istotne jest, nad jakim alfabetem Q określony jest kod C?

A2. Niech $Q=\{0,1,2\}$ i $y=(0,1,2,1,0)$.

(a) Podaj przykład kodu $C\subseteq Q^5$ (wypisując wszystkie jego słowa), który ma rozstęp 2, a dla słowa y istnieje dokładnie jedno słowo kodu w odległości 1 od y.

(b) Wypisz wszystkie elementy kuli Hamminga w przestrzeni Q^5, o środku y i promieniu 1.

(c) Ile jest słów przestrzeni Q^5 w odległości 2 od y?

A3. Załóżmy, że Q jest alfabetem 4-elementowym. Ile elementów ma kula Hamminga o promieniu 3 w przestrzeni Q^6 ?

A4. Wyznacz rozstęp następującego kodu ternarnego (tzn. używającego alfabetu $Q=\{0,1,2\}$):
$C=\{(0,0,0,0),(2,1,0,1),(2,2,1,0),(1,0,1,1),(1,1,2,0),(1,2,0,2),(2,0,2,2),(0,1,1,2),(0,2,2,1)\}$.

A5. Załóżmy, że dla kodów C i C' zachodzi $C\subseteq C'$. Jaka jest relacja między ich rozstępami $r(C)$ i $r(C')$?

A6. Korzystając z definicji kodu doskonałego, uzasadnij, że:

(a) kod $C=\{(0,0,0,0),(1,1,1,1)\}\subseteq\{0,1\}^4$ nie jest doskonały,

(b) kod $C=\{(0,0,0),(1,1,1)\}\subseteq\{0,1\}^3$ jest doskonały.

A7. Dany jest kod ternarny
$C=\{(0,0,0,0,0),(1,2,1,0,0),(2,1,2,0,0),(0,1,1,2,1),(0,2,2,1,2),(2,0,1,1,2),(1,0,2,2,1),(2,2,0,2,1),(1,1,0,1,2)\}$.

(a) Jaki jest jego rozstęp?

(b) Znajdź przykładowy ciąg $y\in\{0,1,2\}^5$, którego odległość do najbliżego mu słowa kodu C wynosi 2.

(c) Czy C jest kodem doskonałym?

A8. Rozważmy kod ternarny

$$C=\{(x,x,x,x,x,y,y,y,y,y)\colon x,y\in\{0,1,2\}\}\subseteq\{0,1,2\}^{10}.$$

(a) Ile słów należy do kodu C i jaki jest jego rozstęp?

(b) Czy C jest kodem doskonałym ?

A9. Oceń poprawność poniższych zdań. Odpowiedź należy poprzeć, jak zwykle, albo uzasadnieniem ogólnym, albo przykładem, albo kontrprzykładem. Poprawność przykładu/kontrprzykładu też należy uzasadnić.

(a) Jeśli $|C|\geqslant 2$ i kod $C\subseteq Q^n$ ma rozstęp k, to każde dwa różne słowa tego kodu są w odległości dokładnie k.

(b) Jeśli $|C|\geqslant 2$ i kod $C\subseteq Q^n$ ma rozstęp k, to istnieją dwa różne słowa tego kodu są w odległości dokładnie k.

(c) Jeśli $|C|\geqslant 2$ i kod $C\subseteq Q^n$ ma rozstęp k, to każde dwa różne słowa tego kodu są w odległości przynajmniej k.

(d) Istnieje kod binarny o rozstępie 4.

(e) Istnieje kod ternarny długości 5, o rozstępie 4, złożony z 4 słów.

(f) Istnieje binarny kod doskonały długości 2, złożony z więcej niż jednego, ale mniej niż 4 słów.

(g) Istnieje kod ternarny doskonały, o rozstępie 3, złożony z 6 słów.

(h) Istnieje kod ternarny doskonały, złożony z 6 słów.

(i) Istnieje kod (niekoniecznie binarny, niekoniecznie ternarny) złożony z 64 słów długości 5, który ma rozstęp 3.

(j) Jeżeli kod $C\subseteq Q^n$ ma rozstęp 5, to w Q^n nie istnieje słowo będące w odległości 2 od dwóch różnych słów kodu C.

(k) Jeżeli rozstęp $r(C)$ kodu C jest liczbą nieparzystą, to nie istnieje słowo będące w odległości co najwyżej $r(C)/2$ od dwóch różnych słów kodu C.

(l) Istnieje alfabet Q, liczba naturalna n i kod $C\subseteq Q^n$ o nieparzystym rozstępie $r(C)$, dla którego

$$|C|\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{r(C)}{2}\rfloor}\binom{n}{j}(|Q|-1)^j>|Q|^n.$$

TPI – 12

Kody

Zadania na ćwiczenia

Zad.1. Dla podanych kodów binarnych C narysuj za pomocą diagramów Venna kule Hamminga o środkach w słowach kodu i o promieniu $\lfloor r(C)/2 \rfloor$: (a) $C = \{000, 111\}$, (b) $C = \{000, 110\}$.

Zad.2. Opisz wszystkie binarne kody doskonałe o przynajmniej dwóch słowach i (a) długości 9 i rozstępie 7; (b) długości 5.

Zad.3. Lisek Chytrusek postanowił sprawdzić, czy istnieje binarny kod doskonały o długości 7 i rozstępie 3. Oceń poprawność podanego rozumowania liska.

Wiadomo, że dla kodów doskonałych o rozstępie 3, długości n, nad alfabetem Q, zachodzi: $|C| \sum_{i=0}^{1} \binom{n}{i} (|Q|-1)^i = |Q|^n$. *Podstawiając $|Q| = 2$ i $n = 7$, otrzymuję $|C| \cdot 8 = 2^7$. Zatem dla $|C| = 2^4$ to równanie jest spełnione. Czyli istnieje doskonały kod binarny o długości 7 i rozstępie 3.*

Zad.4. Czy poniższy zbiór $C \subseteq \mathbb{F}_5^6$ jest kodem liniowym? Jeśli tak, to podaj jego przykładową macierz generującą, wymiar i liczbę słów kodu.

(a) $C = \{(1,2,1,1,1,0), (1,1,1,2,1,0), (2,3,2,3,2,0), (2,4,2,2,2,0), (3,1,3,3,3,0)\}$.
(b) $C = \{(x,x,x,y,y,y) \colon x, y \in \mathbb{F}_5\}$.
(c) $C = \{(x,y,z,x,x+y,x+y+z) \colon x,y,z \in \mathbb{F}_5\}$.
(d) $C = \{(x,y,z,x+1,x+y+1,x+y+z+1) \colon x,y,z \in \mathbb{F}_5\}$.

Zad.5. Niech $C \subseteq \mathbb{F}_3^5$ będzie kodem liniowym, generowanym przez wektory (1,2,1,1,1),(1,1,1,2,1),(0,0,0,0,2). Które z podanych niżej macierzy są macierzami generującymi tego kodu?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Zad.6. Jeśli czas pozwoli sprawdzimy wybrane podpunkty ostatniego zadania domowego.

Zadania do samodzielnego rozwiązania później

B1. Niech $Q = \{0,1,2\}$ oraz $C = \{(2,0,1),(2,1,0)\}$.

(a) Wypisz wszystkie elementy kuli Hamminga w przestrzeni Q^3 o promieniu 2 i środku $(2,0,1)$.
(b) Sprawdź, czy kod C jest doskonały, korzystając z definicji doskonałości.

B2. Niech $Q = \{0,1,2,3,4\}$ oraz $C = \{(2,0,0,1),(0,1,0,0),(2,1,1,2)\}$.

(a) Podaj przykład słowa, dla którego odległość od każdego ze słów kodu jest równa 3.
(b) Czy kod C jest doskonały?

B3.

(a) Ile elementów liczy każda kula Hamminga o promieniu 3 w przestrzeni $\{0,1,2\}^{10}$?
(b) Czy istnieje ternarny kod doskonały długości 5, o dokładnie 80 słowach?

B4. W tym zadaniu przez $B(y,k)$ oznaczamy kulę (oczywiście Hamminga) o środku w y i promieniu k. Załóżmy, że C jest kodem binarnym długości 8, o rozstępie 3. Czy wynika z tego, że

(a) Dla każdej pary różnych słów $x, y \in C$ kule $B(x,1)$ i $B(y,1)$ są rozłączne?
(b) Dla każdej pary różnych słów $x, y \in C$ kule $B(x,2)$ i $B(y,2)$ są nierozłączne?

B5. Uzasadnij, że nie istnieje kod binarny C długości 10, dla którego $|C| = 32$ i rozstęp C wynosi 5.

B6. Czy istnieje kod ternarny długości 7, o rozstępie 5, który ma dokładnie 27 słów?

B7. Opisz wszystkie binarne kody doskonałe o przynajmniej dwóch słowach i długości $n = 3,4,6,8,9$.

B8.* Skonstruuj binarny kod doskonały o rozstępie 3 i długości 7.

B9. Czy poniższy zbiór $C \subseteq \mathbb{F}_5^6$ jest kodem liniowym? Jeśli tak, to podaj jego przykładową macierz generującą.

(a) $C = \{(x,x,y,y,2z,2z) \colon x,y,z \in \mathbb{F}_5\}$.
(b) $C = \{(1,2,1,1,1),(2,4,2,2,2),(3,6,3,3,3),(4,3,4,4,4)\}$.
(c) $C = \{(x,y,z) \colon x,y,z \in \mathbb{F}_5, x+y+z = 0\}$.

B10. Niech $C \subseteq \mathbb{F}_3^5$ będzie kodem liniowym, generowanym przez wektory (1,2,1,1,1) i (1,1,1,2,1). Innymi słowy, C jest podprzestrzenią liniową, której bazą jest $\{(1,2,1,1,1),(1,1,1,2,1)\}$. Czy poniższa macierz jest przykładową macierzą generującą tego kodu?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$