TPI – 10

Łańcuchy Markowa – rozkłady stacjonarne, odwracalność

Zadania domowe, przygotowujące do kartkówki

ZOT jest nieobowiązkowy; zainteresowani oddają na ćwiczeniach jego pisemne rozwiązanie.

A1. Rozważmy łańcuch Markowa, opisujący zabawę Orłosia i Resztki w wersji (a) z poprzedniego zestawu zadań domowych. Czy łańcuch jest nieprzywiedlny? Wyznacz okres każdego stanu tego łańcucha.

A2. Rozważmy łańcuch Markowa opisujący historię żaby nad strumieniem, z poprzedniego zestawu zadań domowych.

(a) Wyznacz wszystkie rozkłady stacjonarne tego łańcucha.
(b) Sprawdź, czy łańcuch jest odwracalny.

A3. Wyznacz przynajmniej jeden rozkład stacjonarny dla łańcucha Markowa o podanej macierzy przejścia

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

A4. Sprawdź, że łańcuch Markowa o macierzy przejścia $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$ jest:

(a) nieprzywiedlny, (b) nieokresowy, (c) odwracalny.

A5. Na ćwiczeniach opisaliśmy dramatyczną sytuację spragnionego Bolka za pomocą łańcucha Markowa.

(a) Czy łańcuch ten jest nieprzywiedlny? Czy jest nieokresowy?
(b) Czy istnieje dla niego rozkład stacjonarny?

A6. Myszka Honoratka wędruje pomiędzy norką, spiżarnią i ciepłym miejscem przy kominku rzucając kostką co kwadrans. Jeśli siedzi w norce, a wypadnie szóstka, wędruje do spiżarni, jeśli jest w spiżarni i wypadnie jedynka, dwójka lub trójka, to udaje się do kominka, a gdy siedzi przy kominku i wypadnie czwórka lub trójka, wraca do norki. W pozostałych przypadkach Honoratka siedzi cichutko na miejscu, które właśnie zajmuje. Wyznacz macierz przejścia dla łańcucha Markowa opisującego podróż Honoratki i oceń, czy łańcuch ten jest odwracalny.

A7. Rozważmy łańcuch Markowa, opisujący nieklasyczne błądzenie cząsteczki po ścieżce o 3 wierzchołkach, z poprzedniego zestawu zadań domowych.

(a) Sprawdź, że łańcuch ten jest nieprzywiedlny i nieokresowy.
(b) Jakie rozkłady stacjonarne posiada?
(c) Jakie jest w przybliżeniu prawdopodobieństwo przejścia ze stanu -1 do stanu 0 w 2000 krokach? Błąd przybliżenia nie jest istotny.
(d) Jakie jest w przybliżeniu prawdopodobieństwo, że po 2000 krokach cząsteczka znajdzie się w wierzchołku -1? W przeciwieństwie do poprzedniego podpunktu, tu nic nie wiemy o rozkładzie początkowym.

A8. Rozważmy łańcuch Markowa, opisujący błądzenie po cyklu C_4 z przekątną, z pierwszego zadania poprzednich ćwiczeń.

(a) Wyznacz rozkład stacjonarny dla tego łańcucha.
(b) Sprawdź, że łańcuch jest nieprzywiedlny i nieokresowy.
(c) Wyznacz przybliżone prawdopodobieństwo, że po 12345 krokach znajdziemy się z wierzchołku nr 1. Błąd przybliżenia nie jest istotny.
(d) Wyznacz przybliżone prawdopodobieństwo, że po 12345 krokach znajdziemy się z wierzchołku nr 1, a nastepnym kroku – w wierzchołku nr 2. Błąd przybliżenia nie jest istotny.

A9. Wykaż, że każdy łańcuch Markowa o dwóch stanach (czyli o dowolnej macierzy przejścia 2×2) jest odwracalny.

ZOT 6. Kot Chojrak jest głodny. Jest to rozpieszczony kot, który – zamiast polować – błąka się między domem, ogrodem, polem, szkołą i plebanią, licząc na to, że ktoś go nakarmi. Nie błądzi jednak zupełnie losowo, bo ma swoje zwyczaje, opisane poniżej. Gdy kot zje cokolwiek, kończy wędrówkę. W szkole dzieci złapią kota i niestety ani się nie naje, ani nie będzie mógł dalej wędrować. Na polu z prawdopodobieństwem 1/9 wpadnie mu w łapy niezbyt rozgarnięta mysz (którą oczywiście kot ze smakiem zje), a jeśli nie wpadnie, to z jednakowym prawdopodobieństwem Chojrak pójdzie do jedenego z pozostałych 4 miejsc. Na plebanii dostanie wątróbkę lub chrupki (z jednakowym prawdopodobieństwem). Za wątróbką kot przepada, ale nie lubi chrupków, więc po powąchaniu miski z chrupkami wyrusza w dalszą podróż, wybierając z jednakowym prawdopodobieństwem jedno z pozostałych 4 miejsc. W domu kot niestety nigdy nic nie dostaje (ale kot nie traci nadziei). Po bolesnym rozczarowaniu w domu wybiera pole lub ogród, z jednakowym prawdopodobieństwem. W ogrodzie nigdy nie udaje mu się nic zdobyć do jedzenia i stamtąd zawsze idzie albo na plebanię, albo do szkoły (wybierając cel losowo). Załóżmy, że na początku kot siedzi w domu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Chojrak coś przekąsi?

TPI – 10

Łańcuchy Markowa – rozkłady stacjonarne, odwracalność

Zadania na ćwiczenia

Zad.1. Oto macierz przejścia pewnego łańcucha Markowa.

- Sprawdź, czy łańcuch jest nieprzywiedlny.
- Sprawdź, czy istnieją w nim stany okresowe.
- Wyznacz liczbę rozkładów stacjonarnych.
- Znajdź przybliżone prawdopodobieństwo $p_{34}(2000)$.

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zad.2. Rozważmy zabawę Orłosia i Resztki z zadania domowego z poprzedniej listy. Załóżmy, że na początku obie ropuchy znajdują się po stronie północnej. Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa dla położenia ropuch po 12345 rzutach monetą.

Zad.3. Rozważmy klasyczne błądzenie po cyklu na 4 wierzchołkach z przekątną, w którym wierzchołek stopnia 3 ma numer 1. Nie znamy rozkładu początkowego. Jakie jest w przybliżeniu prawdopodobieństwo, że po 2000 krokach znajdziemy się (a) w wierzchołku 1? (b) w jednym z wierzchołków stopnia 3?

Zad.4. Na łące przedzielonej niskim murkiem na część północną i południową bawią się trzy wesołe świerszcze: Jeden, Dwa i Trzy. Rzucają one kostką i kiedy wypadną na niej co najwyżej trzy oczka świerszcz o odpowiednim imieniu przeskakuje przez murek. Jeśli natomiast na kostce wypadną więcej niż trzy oczka, wszystkie świerszcze podskakują z radości, pozostając jednakże każdy po swojej stronie łąki. Budujemy dla zabawy świerszczy łańcuch Markowa, w którym ważne jest ile świerszczy znajduje się na każdej stronie łąki, ale nie jest ważne, które to świerszcze. Czy łańcuch jest odwracalny?

Zad.5. Tasujemy talię 3 kart w taki sposób: zaczynamy od dowolnego stosu, wybieramy losowo (z jednakowym prawdopodobieństwem) jedną z 3 kart i kładziemy ją na wierzch. Sprawdź, czy odpowiadający (w naturalny sposób) temu procesowi łańcuch Markowa jest odwracalny.

Zad.6. (rezerwowe) Komputer generuje tekst złożony z liter A, B, C wg takich reguł: Zaczyna od losowo wybranej litery. Jeżli ostatnio napisana litera jest samogłoską, następna będzie spółgłoską wybraną z jednakowym prawdopodobieństwem. Jeżeli ostatnio napisana litera jest spółgłoską, następna będzie inna, przy czym samogłoska jest wybierana z prawdopodobieństwem dwa razy większym niż spółgłoska. Dobra wróżka powiedziała, że prawdopodobieństwo wypisania sekwencji ABC po 200 krokach (czyli wygenerowanych literach) wynosi w przybliżeniu 1/15 i błąd przybliżenia jest zaniedbywalnie mały. Jakie jest w przybliżeniu prawdopodobieństwo wypisania sekwencji CBA po 200 krokach?

Zadania do samodzielnego rozwiązania później

B1. Obok podana jest macierz przejścia pewnego łańcucha Markowa.

(a) Czy łańcuch jest nieprzywiedlny?
(b) Czy posiada stany okresowe?
(c) Znajdź wszystkie rozkłady stacjonarne tego łańcucha.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

B2. Na podstawie podanej macierzy przejścia łańcucha Markowa znajdź przybliżone prawdopodobieństwo, że po 2000 krokach łańcuch znajdzie się w stanie 3.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

B3. Pchła skacze po wierzchołkach ścieżki o 4 wierzchołkach. W każdym ruchu z prawdopodobieństwem 1/2 zostaje na miejscu, a z prawdopodobieństwem 1/2 zmienia wierzchołek, przeskując do wierzchołka przyległego, wybranego losowo w sposób jednostajny (czyli z jednakowym prawdopodobieństwem). Na początku pchła z jednakowym prawdopodobieństwem znajduje się w dowolnym wierzchołku ścieżki. Jakie jest w przybliżeniu prawdopodobieństwo, że po 100tys. ruchów pchła znajdzie się w pierwszym wierzchołku?

B4. Koń szachowy spaceruje po zwyczajnej szachownicy 8×8. W każdym ruchu z pól, na które może skoczyć, wybiera losowo (z równym prawdopodobieństwem) jedno i na nie skacze. Jaki jest naturalny zbiór stanów dla łańcucha Markowa opisującego spacer konia? Czy łańcuch ów jest nieprzywiedlny? Czy ma stany okresowe?

B5. 50 zawodników gra w piłkę: co sekundę zawodnik posiadający piłkę rzuca ją do losowo wybranego innego zawodnika.

(a) Co wspólnego ma ta gra z bładzeniem losowym po grafach?
(b) Oblicz (zdroworozsądkowo) prawdopodobieństwo, że piłka wróci do zawodnika rozpoczynającego grę w czasie krótszym niż 100 s.

B6. Na łące przedzielonej niskim murkiem na część północną i południową bawią się trzy wesołe świerszcze: Jeden, Dwa i Trzy. Rzucają one kostką i kiedy wypadną na niej co najwyżej trzy oczka świerszcz o odpowiednim imieniu przeskakuje przez murek. Jeśli natomiast na kostce wypadną więcej niż trzy oczka, wszystkie świerszcze podskakują z radości, pozostając jednakże każdy po swojej stronie łąki. Budujemy dla zabawy świerszczy łańcuch Markowa, w którym ważne jest ile świerszczy znajduje się na każdej stronie łąki, ale nie jest ważne, które to świerszcze.

(a) Oblicz przybliżone prawdopobieństwo, że po 117345 rzutach kostką wszystkie świerszcze znajdą się na północnej stronie łąki. Zwróć uwagę, że nie wiemy, po której stronie murku znajdują się świerszcze na początku zabawy (pod tym względem rozbrykane świerszcze nie są tak przewidywalne jak ropuchy z zadania domowego).

(b) Jeżeli w poprzednim podpunkcie ktoś zapomniał o sprawdzeniu nieprzywiedlności i nieokresowości łańcucha, powinien zrobić to teraz.

B7. Na łące przedzielonej niskim murkiem na część północną i południową bawi się n świerszczy, o imionach $1, \dots, n$. Co minutę z prawdopodobieństwem $1/4$ zostają w miejscu, a z prawdopodobieństwem $3/4$ dokonuje się zmiana: losowo wybrany w sposób jednostajny świerszcz przeskakuje na drugą stronę. Budujemy dla zabawy świerszczy łańcuch Markowa, w którym ważne jest ile świerszczy znajduje się na każdej stronie łąki oraz ważne jest, które to świerszcze (mamy więc 2^n stanów).

(a) Czy łańcuch jest nieprzywiedlny?

(b) Czy łańcuch jest okresowy?

(c) Czy łańcuch jest odwracalny?

(d) Oblicz przybliżone prawdopobieństwo, że po 117345 minutach kostką wszystkie świerszcze znajdą się na północnej stronie łąki. Zwróć uwagę, że nie wiemy, po której stronie murku znajdują się świerszcze na początku zabawy.

B8. Tasujemy talię n ($n \geqslant 2$) kart w taki sposób: zaczynamy od dowolnego stosu, wybieramy losowo (z jednakowym prawdopodobieństwem) jedną z n kart i kładziemy ją na wierzch.

(a) Sprawdź, czy odpowiadający (w naturalny sposób) temu procesowi łańcuch Markowa jest odwracalny, dla trzech przypadków: $n = 2$, $n = 4$, $n = 52$.

(b) Uzasadnij, że łańcuch jest nieokresowy i nieprzywiedlny.

B9. Tasujemy talię 3 kart A, B i C, w następujący sposób: w każdym kroku wybieramy z jednakowym prawdopodobieństwem $1/2$ kartę środkową lub spodnią i przekładamy ją na wierzch talii. Skonstruuj łańcuch Markowa odpowiadający temu procesowi, wyznacz jego macierz przejścia i sprawdź, czy jest on:

(a) nieprzywiedlny,

(b) nieokresowy,

(c) odwracalny

(d) i czy posiada jednostajny rozkład stacjonarny.

B10. Oceń poprawność poniższych zdań. Odpowiedź należy poprzeć, jak zwykle, albo uzasadnieniem ogólnym, albo przykładem, albo kontrprzykładem.

(a) Łańcuch jest nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych jego stanów i, j zachodzi $p_{ij}(1) > 0$.

(b) Istnieje nieprzywiedlny i nieokresowy łańcuch Markowa, w którym dla każdego stanu j zachodzi $p_{1j}(n) \to 0$ przy $n \to \infty$.

(c) Jeśli łańcuch Markowa posiada rozkład stacjonarny $[\pi_1, \dots, \pi_t]$, to dla każdego stanu j zachodzi $p_{1j}(n) \to \pi_j$ przy $n \to \infty$.

(d) Każdy łańcuch Markowa ma dokładnie jeden rozkład stacjonarny.

(e) Jeżeli macierz przejścia łańcucha jest symetryczna, to łańcuch jest odwracalny.

(f) Jeżli łańcuch o zbiorze stanów $S = \{1, 2\}$ jest nieokresowy i nieprzywiedlny, a jego rozkładem stacjonarnym jest $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, to $p_{12}(n) \to \frac{2}{3}$ przy $n \to \infty$.

(g) Jeżli łańcuch o zbiorze stanów $S = \{1, 2\}$ jest nieokresowy i nieprzywiedlny, a jego rozkładem stacjonarnym jest $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, to $p_{21}(n) \to \frac{2}{3}$ przy $n \to \infty$.