TPI – 9

Łańcuchy Markowa

Zadania domowe, przygotowujące do kartkówki

Przez $p_{ij}^{(t)}$ we wszystkich zadaniach oznaczamy prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j w t krokach, a przez ρ^t rozkład prawdopodobieństwa po t krokach.

A1. Żaba siedzi nad strumieniem i co minutę z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{3}$ skacze na drugi brzeg, a z prawdopodobieństwem $q = \frac{2}{3}$ nie rusza się z miejsca. Niech X_n będzie położeniem żaby (numerem brzegu strumienia) po n minutach. (X_n) jest zatem łańcuchem Markowa na zbiorze stanów $S = \{1, 2\}$.

(a) Przedstaw ten łańcuch za pomocą grafu skierowanego, którego wierzchołkami są oba stany, a strzałkom (w tym pętlom) przyporządkowane są odpowiednie prawdopodobieństwa przejścia ze stanu do stanu.

(b) Wyznacz macierz przejścia dla tego łańcucha.

(c) Załóżmy, że na początku żaba jest na brzegu nr 1. Wyznacz ρ^1, ρ^2 i ρ^3, czyli rozkłady prawdopodobieństwa dla położenia żaby po 1, 2, 3 minutach.

(d) Wyznacz trzecią potęgę macierzy przejścia i odczytaj z niej $p_{12}^{(3)}$. Czy wynik pokrywa się z obliczeniami przeprowadzonymi w poprzednim podpunkcie?

(e) Załóżmy, że rozkład początkowy żaby to $\rho^0 = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, tzn. z jednakowym prawdopodobieństwem znajduje się na brzegu 1 i na brzegu 2. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po 3 minutach znajdzie się na brzegu 1? Jakie jest prawdopodobieństwo, że po 32564 minutach znajdzie się na brzegu 1?

A2. Obok podana jest macierz przejścia łańcucha Markowa o zbiorze stanów $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(a) Znajdź $p_{13}^{(2)}$.

(b) Znajdź $p_{23}^{(100)}$.

(c) Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa dla tego łańcucha po pierwszym kroku, przy założeniu, że rozkładem początkowym łańcucha jest $\rho^0 = [\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{6}]$.

(d) Przedstaw łańcuch Markowa za pomocą grafu skierowanego o 5 wierzchołkach.

A3. Oto macierz przejścia pewnego łańcucha Markowa o zbiorze stanów $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Bez podnoszenia macierzy do potęgi znajdź $p_{54}^{(5)}$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

A4. Oto macierz przejścia pewnego łańcucha Markowa na zbiorze stanów $\{1, 2, 3, 4\}$.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Załóżmy, że rozkładem początkowym tego łańcucha jest $[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{6}]$. Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa po pierwszym kroku.

(b) Załóżmy, że na początku łańcuch jest w stanie 2. Jakie jest prawdopodobieństwo przejścia do stanu 3 w 100 krokach?

A5. Łąka przedzielona jest niskim murkiem na część północną i południową. Po przeciwnych stronach murku siedzą dwie ropuchy, Orłoś i Resztka, rzucając co jakiś czas monetą. Gdy wypadnie orzeł, Orłoś przeskakuje przez murek na drugą stronę, jeśli reszka, przez murek przeskakuje Resztka.

(a) Przedstaw łańcuch Markowa, odpowiadający tej zabawie, za pomocą grafu skierowanego o 4 wierzchołkach. Podaj macierz przejścia dla tego łańcucha.

(b) Przypuśćmy, że nie rozróżniamy obu ropuch. Skonstruuj łańcuch Markowa o trzech stanach, odpowiadający tej zabawie.

(c) Przypuśćmy, że interesuje nas tylko to, czy obie ropuchy są po tej samej, czy po drugiej stronie murku. Skonstruuj łańcuch Markowa o dwóch stanach, odpowiadający tej sytuacji.

A6. Cząsteczka spaceruje po ścieżce o 3 wierzchołkach, ponumerowanych liczbami $-1, 0, 1$ (wierzchołek 0 jest stopnia 2). W każdym kroku z prawdopodobieństwem $1/2$ pozostaje w miejscu, a z prawdopodobieństwem $1/2$ przemieszcza się, przy czym przemieszcza się do sąsiedniego wierzchołka, a w punkcie 0 szanse wybrania -1 i 1 są takie same.

(a) Przedstaw łańcuch Markowa odpowiadający temu spacerowi za pomocą grafu skierowanego.

(b) Podaj macierz przejścia dla tego łańcucha.

(c) Załóżmy, że w chwili 0 cząsteczka znajduje się w stanie -1. Wyznacz czwartą potęgę macierzy przejścia i na tej podstawie podaj prawdopodobieństwo, że cząsteczka po 4 krokach znajdzie się w stanie 1.

(d) Załóżmy, że w chwili 0 cząsteczka z jednakowym prawdopodobieństwem znajduje się w stanie -1, 0 lub 1. Dla każdego wierzchołka ścieżki wyznacz prawdopodobieństwo, z jakim cząsteczka znajdzie się w tym wierzchołku po 4 krokach.

TPI – 9

Łańcuchy Markowa

Zadania na ćwiczenia

Zad.1. Niech G będzie grafem nieskierowanym o czterech wierzchołkach i pięciu krawędziach, tzn. G jest cyklem o długości cztery z jedną przekątną. Wierzchołek nr 1 ma stopień 3, wierzchołek nr 2 ma stopień 2. Rozpatrzmy tzw. klasyczne błądzenie losowe na grafie G, polegające na tym, że żeton umieszczony w wierzchołku w przesuwamy do jego sąsiada z prawdopodobieństwem $1/\deg(w)$. Wyznacz macierz przejścia dla tak określonego łańcucha Markowa. Nie korzystając z tej macierzy, znajdź rozkład prawdopodobieństwa dla łańcucha po 2 krokach, jeśli na początku umieszczamy żeton z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ w wierzchołku 1 i z z prawdopodobieństwem $\frac{3}{4}$ w wierzchołku 2, tzn. $\rho^0 = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0]$. Następnie sprawdź poprawność wyniku, korzystając z kwadratu macierzy przejścia.

Zad.2. Oto macierz przejścia pewnego łańcucha Markowa:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wiedząc, że $\rho^1 = [0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}]$, wyznacz ρ^0 oraz ρ^2.

Zad.3. Spragniony Bolek ma tylko 1 zł, a chciałby nabyć napój wysokoenergetyczny kosztujący 3 zł. W tym celu udaje się do kasyna prowadzonego przez Lolka, w którym postanawia grać w rzut monetą tak długo, póki nie zbankrutuje lub nie wygra 3 zł. W każdej grze Bolek wygrywa lub przegrywa 1 zł z prawdopodobieństwem 1/2. Znajdź prawdopodobieństwo, że Bolek wygra 3 zł i ugasi pragnienie. Opisz dramatyczną sytuację Bolka używając odpowiedniego łańcucha Markowa.

Zad.4. Ala i Franek rzucaja na zmiane standardową moneta. Franek wygrywa, gdy po raz pierwszy w ciągu rzutów pojawi sie ROR, a Ala – gdy pojawi sie OOR. Przedstaw tę grę w postaci lancucha Markowa (o skończonym, jak zwykle, zbiorze stanów).

Zad.5. Rozważmy zabawę żab z zadania domowego A5(a). Załóżmy, że na początku obie ropuchy znajdują się po stronie północnej. Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa dla położenia ropuch po 12345 rzutach monetą.

Zad.6. (rezerwowe) Na wierzchołkach trójkąta siedzą 3 robaczki. Robaczki co sekundę mogą przybierać kolor czerwony lub zielony. Polega to na tym, że jeśli robaczek widzi, że oba pozostałe robaczki mają ten sam kolor, to w następnej sekundzie przybierze ich kolor, jeżeli zaś ich kolory są różne, to w następnej sekundzie robaczek z prawdopodobieństwem 1/2 będzie zielony, a z prawdopodobieństwem 1/2 – czerwony. Na początku jeden robaczek jest czerwony, a 2 zielone. Zbuduj łańcuch Markowa odpowiadający temu procesowi i podaj jego macierz przejścia, przy założeniu, że

(a) Ważne jest dla nas dokładne rozłożenie kolorów robaczków na trójkącie, z uwzględnieniem numerów wierzchołków.
(b) Ważna jest dla nas jedynie liczba robaczków w obu kolorach.

Zadania do samodzielnego rozwiązania później

B1. W pierwszym kapeluszu są 3 kule białe, a w drugim 3 kule czarne. W n–tym doświadczeniu, losujemy po jednej kulce z obu kapeluszy i zamieniamy je miejscami. Niech X_n będzie liczbą białych kulek w pierwszym kapeluszu po n doświadczeniach. Wyznacz macierz przejścia dla łańcucha Markowa $(X_n)_{n=0}^{\infty}$.

B2. Oto macierz przejścia łańcucha Markowa na zbiorze stanów $S = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

(a) Wyznacz prawdopodobieństwo przejścia ze stanu 2 do stanu 4 w trzech krokach.
(b) Wyznacz prawdopodobieństwo, że zaczynając od rozkładu początkowego $\rho^0 = [\frac{1}{6}, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}]$ po trzech krokach łańcuch znajdzie się w stanie 3.

B3. Oto macierz przejścia pewnego łańcucha Markowa: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Narysuj graf skierowany obrazujący ten łańcuch Markowa. Bez podnoszenia macierzy do potęgi wyznacz rozkład prawdopodobieństwa po 5 krokach, przy założeniu, że rozkładem początkowym łańcucha jest $[0, 0, 0, 1, 0, 0]$.

B4. Student błąka się losowo między trzema bibliotekami $1, 2, 3$ i domem (oznaczmy go numerem 0), tzn. będąc w danym budynku, wybiera kolejne miejsce pobytu losowo spośród trzech pozostałych. Drogę między tymi budynkami pokonuje (uwzględniając czas spędzony w budunku) w czasie 1h. Niech X_n będzie numerem budynku, w którym student znajduje się po n godzinach. Załóżmy, że na początku student jest w domu. Wyznacz rozkład X_n dla $n = 1, 2, 3$ dwoma sposobami: korzystając z macierzy przejścia i „zdroworozsądkowo".

B5. Cztery robaczki znajdują się w jednym wierzchołku czworościanu. Co sekundę każdy z nich z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ pozostaje na miejscu lub losowo (z jednakowym prawdopodobieństwem) przemieszcza się do jednego z sąsiednich wierzchołków czworościanu.

(a) Ile stanów ma łańcuch Markowa wyrażający wędrówkę robaczków, jeżeli ważne jest dla nas, który robaczek w którym wierzchołku czworościanu się znajduje?

(b) Ile stanów ma łańcuch Markowa wyrażający wędrówkę robaczków, jeżeli ważna jest dla nas jedynie liczba robaczków w każdym z wierzchołków czworościanu?

(c) Ile stanów ma łańcuch Markowa wyrażający wędrówkę robaczków, jeżeli ważna jest dla nas jedynie liczba robaczków w każdym z wierzchołków czworościanu, a dodatkowo nieistotna jest numeracja wierzchołków czworościanu?

(d) Wyznacz macierz przejścia dla ostatniego modelu.