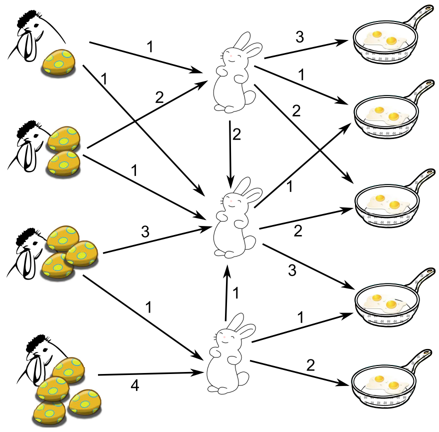
STRUKTURY DYSKRETNE 8, DODATEK
Przepływy w sieciach

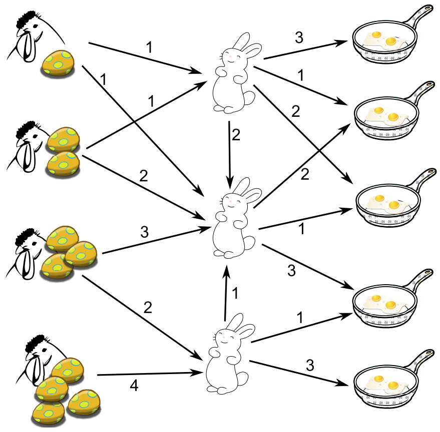
## Do rozwiązania na komputerze

*Do rozwiązania przy pomocy dowolnego narzędzia z zaimplementowanym algorytmem do wyznaczania przepływów / cięć w standardowych sieciach. Przykład użycia pakietu networkx w języku Python – w osobnym pliku.*

**Zad.1.**
Cztery kury zniosły jaja. $i$-ta kura zniosła $i$ jaj. Kury chcą wysłać wszystkie jaja do 5 rodzin, korzystając z sieci 3 pośredników. Każda rodzina musi dostać po 2 jaja. Na rysunku podane są przepustowości łączy, czyli liczby jaj, jakie mogą być przesłane bezpośrednio między dwoma węzłami naszej wielkanocnej sieci (tworzonej przez kury, pośredników i rodziny).



(a)



(b)

Sprawdź, która z podanych sieci wielkanocnych zadziała, tzn. w której sieci jaja mogą być rozesłane zgodnie z powyższymi zasadami. W tym przypadku opisz, kto komu ile jaj wysyła. W przypadku nieistnienia rozwiązania wskaż cięcie, z którego jasno wynika, że sieć nie zadziała jak należy.

**Zad.2.** Rozważmy korespondencyjną sieć hobbistów, wysyłających sobie kartki z pozdrowieniami. Każdemu człowiekowi $i$ przypisujemy liczbę całkowitą $r_i$, która mówi, jaka musi być różnica między liczbą kartek przez niego otrzymanych i wysłanych (opisanych w tabelce poniżej). Krawędziom skierowanym między ludźmi $i$ oraz $j$ przypisujemy nieujemne liczby całkowite $k_{ij}$, co oznacza, że $i$ może wysłać $j$ co najwyżej $k_{ij}$ kartek (liczby $k_{ij}$ zawiera dwuwymiarowa tabelka). Rozstrzygnij, która z opisanych niżej sieci korespondencyjnych może w rzeczywistości zadziałać. W przypadku istnienia rozwiązania opisz, jak ludzie powinni wysyłać kartki. Dla sieci (c) zamiast ograniczeń górnych $k_{ij}$ podane zostały ograniczenia dolne i górne dla każdej strzałki.

(a)

| $i$ \ $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 |
| 4 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| 5 | 0 | 0 | 7 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_i$ | $-5$ | 7 | 0 | $-7$ | $-7$ | 7 | 5 |

(b) tabelka dla $k_{ij}$ jak w (a)

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_i$ | $-5$ | 5 | 0 | $-6$ | $-7$ | 7 | 6 |

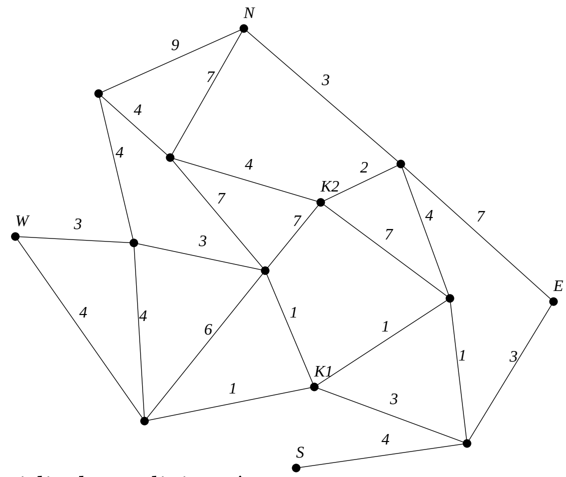
(c)

| $i$ \ $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $1;3$ | 0 | 0 | 0 | $1;5$ | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | $1;2$ | 0 | 0 |
| 3 | 0 | $1;7$ | 0 | 0 | 0 | $1;6$ | 0 |
| 4 | $1;4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $1;6$ |
| 5 | 0 | 0 | $1;6$ | 0 | 0 | 0 | $1;4$ |
| 6 | 0 | 0 | 0 | $1;2$ | $1;4$ | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_i$ | $-5$ | 6 | 0 | $-8$ | $-7$ | 7 | 9 |

**Zad.3.** Mamy do rozwiązania następujący problem optymalizacyjny.

W mieście ukrywają się przestępcy. Policja zna prawdopodobne miejsca kryjówek przestępców. Przestępcy mogą opuścić miasto jedynie kilkoma wyjazdami, również policji znanymi. Dla każdej ulicy wiadomo, ilu policjantów potrzeba, by ją zablokować. Na mapce miasta $K1, K2$ oznaczają miejsca, w których mogą ukrywać się przestępcy, a $W, N, E, S$ – wyjazdy z miasta. Liczby przy ulicach określają, ilu policjantów potrzeba, by zablokować ulicę. Ulice są dwukierunkowe.




Przeprowadź skuteczną blokadę ulic przy pomocy jak najmniejszej liczby policjantów.

**Zad.4.** Na pewnym kameralnym uniwersytecie wykłady prowadzi sześciu profesorów, a ćwiczenia – dziewięciu adiunktów. Zajęcia z każdego przedmiotu trwają, jak to zwykle bywa, przez cały semestr. Profesorowie powinni hospitować ćwiczenia do prowadzonych przez siebie wykładów. Przy tym następujące warunki muszą być spełnione:

(a) Każdy profesor musi w semestrze przeprowadzić **dokładnie** 4 hospitacje.
(b) Profesor może hospitować tylko ćwiczenia do prowadzonych przez siebie wykładów.
(c) Każdy profesor może hospitować zajęcia prowadzone przez danego adiunkta co najwyżej dwukrotnie.
(d) Każdy adiunkt może mieć na wszystkich swoich zajęciach w czasie semestru co najwyżej 3 hospitacje.

Rozstrzygnij, czy można ułożyć semestralny plan hospitacji, spełniający wszystkie powyższe warunki. Poniższa tabelka opisują, kto jakie zajęcia prowadzi.

| zajęcia | $Z_1$ | $Z_1$ | $Z_2$ | $Z_2$ | $Z_3$ | $Z_3$ | $Z_3$ | $Z_4$ | $Z_4$ | $Z_4$ | $Z_5$ | $Z_6$ | $Z_6$ | $Z_7$ | $Z_7$ | $Z_8$ | $Z_8$ | $Z_9$ | $Z_9$ | $Z_9$ | $Z_{10}$ | $Z_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| prof. | $P_1$ | $P_1$ | $P_1$ | $P_1$ | $P_2$ | $P_2$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_3$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_4$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_5$ | $P_5$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_6$ | $P_6$ | $P_6$ | $P_6$ |
| adiunkt | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_5$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_4$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_4$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_5$ | $A_6$ | $A_8$ | $A_9$ | $A_3$ | $A_6$ | $A_7$ | $A_8$ | $A_9$ |

**Zad.5.** Zadanie analogiczne do zad.4, ale zamiast „dokładnie 4 hospitacje” są „przynajmniej 4 hospitacje”.

**Zad.6.** Za pomocą algorytmu wyznaczającego największy przepływ wyznacz największe skojarzenie w podanym grafie dwudzielnym o dwupodziale $(X, Y)$. Tabelka opisuje, które wierzchołki z $X$ i $Y$ są przyległe.

| $X$ \ $Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 8 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |