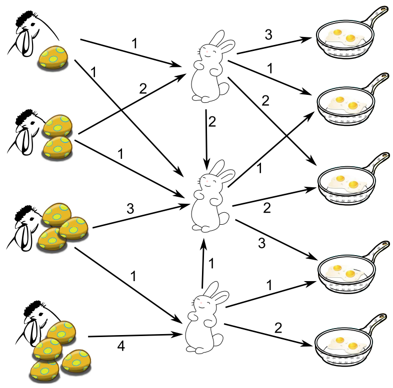
Przepływy w sieciach – c.d.

Zadania domowe, przygotowujące do kartkówki znajdują się na liście 7, po zadaniach z ćwiczeń.

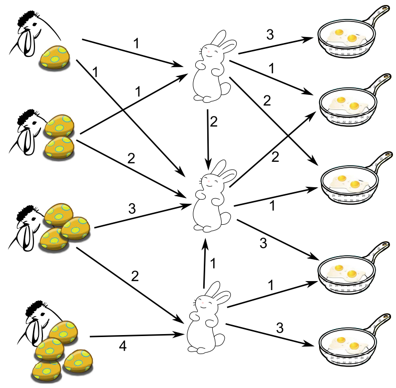
Zadania na ćwiczenia

Zakładamy, że we wszystkich zadaniach można korzystać z gotowego algorytmu, znajdującego największy przepływ (i najmniejsze cięcie) w standardowych sieciach z jednym źródłem i jednym ujściem.

Zad.1. Cztery kury zniosły jaja. i-ta kura zniosła i jaj. Kury chcą wysłać wszystkie jaja do 5 rodzin, korzystając z sieci 3 pośredników. Każda rodzina musi dostać po 2 jaja. Na rysunku podane są przepustowości łączy, czyli liczby jaj, jakie mogą być przesłane bezpośrednio między dwoma węzłami naszej jajecznej sieci (tworzonej przez kury, pośredników i rodziny).



(a)

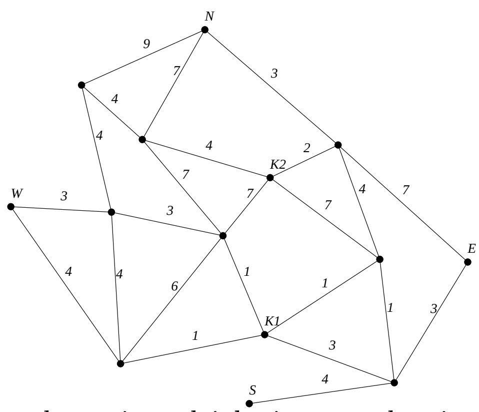


(b)

- Sprawdź w domu, która z podanych sieci jajecznej zadziała, tzn. w której sieci jaja mogą być rozesłane zgodnie z powyższymi zasadami. W tym przypadku opisz, kto komu ile jaj wysyła.
- Przetłumacz problem rozesłania jaj w pierwszej sieci na równoważny mu problem przepływu w standardowej sieci z jednym źródłem i jednym ujściem. Jaki warunek jest konieczny i dostateczny, by sieć jajeczna mogła zadziałać?
- Rozważmy dowolną sieć jajeczną, tzn. z dowolną liczbą kur, pośredników i rodzin, pojmnościami krawędzi i wymaganiami związanymi z tym, ile jaj dana kura zniosła oraz ile jaj dana rodzina potrzebuje. Przetłumacz problem na równoważny mu problem przepływu w standardowych sieciach z jednym źródłem i jednym ujściem. Jaki warunek jest konieczny i dostateczny, by sieć jajeczna mogła zadziałać?

Zad.2. Rozważmy korespondencyjną sieć hobbistów, wysyłających sobie kartki z pozdrowieniami. Każdemu człowiekowi i przypisujemy liczbę całkowitą r_i, która mówi, jaka musi być różnica między liczbą kartek przez niego otrzymanych i wysłanych. Krawędziom skierowanym między ludźmi i oraz j przypisujemy nieujemne liczby całkowite k_{ij}, co oznacza, że i może wysłać j co najwyżej k_{ij} kartek. Jak rozstrzygnąć, czy opisana korespondencyjna sieć może w rzeczywistości zadziałać, tzn. czy ludzie mogą wysłać i dostać kartki zgodnie ze swoimi zapotrzebowaniami? Jak powinni wysyłać kartki?

Zad.3. Mamy do rozwiązania następujący problem optymalizacyjny.
W mieście ukrywają się przestępcy. Policja zna prawdopodobne miejsca kryjówek przestępców. Przestępcy mogą opuścić miasto jedynie kilkoma wyjazdami, również policji znanymi. Dla każdej ulicy wiadomo, ilu policjantów potrzeba, by ją zablokować. Zadaniem policji jest przeprowadzić skuteczną blokadę ulic przy pomocy jak najmniejszej liczby policjantów.
Dla jasności obrazu podajemy przykładową mapkę miasta. $K1, K2$ to miejsca, w których mogą ukrywać się przestępcy, a W, N, E, S – wyjazdy z miasta. Liczby przy ulicach określają, ilu policjantów potrzeba, by zablokować ulicę. Ulice są dwukierunkowe.



Zaproponuj algorytm rozwiązujący problem dla dowolnego miasta i przedstaw jego działanie na podanej mapce. Dane wejściowe to plan miasta z zaznaczonymi potencjalnymi kryjówkami przestępców, możliwymi miejscami wyjazdu z miasta i liczbą policjantów konieczną do zablokowania każdej ulicy. Algorytm powinien zwracać optymalną liczbę policjantów i ich rozmieszczenie na ulicach.

Zad.4. Na pewnym kameralnym uniwersytecie wykłady prowadzi czterech profesorów, a ćwiczenia – dziewięciu adiunktów. Przedmiotów jest dużo, zajęcia z każdego przedmiotu trwają, jak to zwykle bywa, przez cały semestr. Profesorowie powinni hospitować ćwiczenia do prowadzonych przez siebie wykładów. Przy tym następujące warunki muszą być spełnione:

(a) Każdy profesor musi w semestrze przeprowadzić **dokładnie** 4 hospitacje.
(b) Profesor może hospitować tylko ćwiczenia do prowadzonych przez siebie wykładów.
(c) Każdy profesor może hospitować zajęcia prowadzone przez danego adiunkta co najwyżej dwukrotnie.
(d) Każdy adiunkt może mieć na wszystkich swoich zajęciach w czasie semestru co najwyżej 6 hospitacji.

Jak rozstrzygnąć, czy można ułożyć semestralny plan hospitacji, spełniający wszystkie powyższe warunki?

Zad.5. Zadanie analogiczne do zad.4, ale zamiast „dokładnie 4 hospitacje" są „przynajmniej 4 hospitacje".

Zadania do samodzielnego rozwiązania później

B1. Fabryka czekolady produkuje 50 różnych smakołyków. Fabryka chce zbadać kwestionariuszami opinie 100 klientów o swoich produktach. Oto założenia, jakie kwestionariusze muszą spełniać:

- Nie można pytać o produkt, którego klient nigdy nie kupił.
- Każdy klient jest pytany o co najwyżej 10 produktów.
- Każdy produkt musi być oceniony przez dokładnie 5 klientów

Naszym celem jest rozstrzygnąć, czy można wg tych zasad kwestionariusze ułożyć.

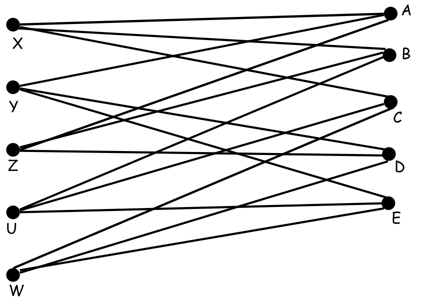
(a) Zaprojektuj tradycyjną sieć D z jednym ujściem i źródłem tak, by problem ułożenia kwestionariuszy sprowadzić do równoważnego mu problemu badania przepływu w sieci D.
(b) Jaki warunek musi spełniać przepływ w sieci D, aby ułożenie kwestonariuszy było możliwe?
(c) Jak na podstawie przepływu w sieci D zbudować kwestionariusze?

B2. Rozwiąż zadanie analogiczne do poprzedniego, zastępując warunek „dokładnie 5 klientów" przez „przynajmniej 5 klientów".

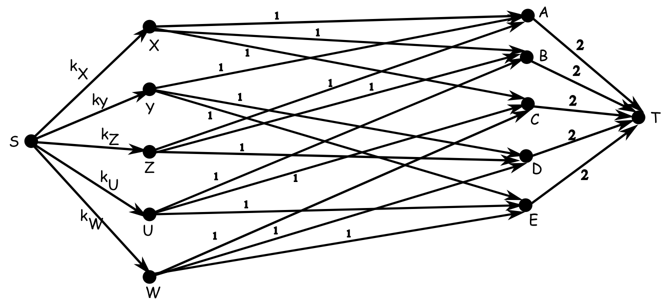
B3. Chcemy zbadać kwestionariuszami opinie klientów X, Y, Z, U, W o produktach A, B, C, D, E. Na rysunku po lewej stronie zaznaczono krawędziami, który klient kupił które produkty. Oto założenia, jakie kwestionariusze muszą spełniać:

- Nie można pytać o produkt, którego klient nigdy nie kupił.
- Każdy klient i jest pytany o **co najwyżej** k_i produktów, dla $i = X, Y, Z, U, W$.
- Każdy produkt musi być oceniony przez **dokładnie** 2 klientów.

Aby rozstrzygnąć, czy można wg tych zasad kwestionariusze ułożyć, zbudowaliśmy sieć S_2 przedstawioną po prawej stronie. Jaki warunek musi być spełniony dla sieci S_2, aby ułożenie kwestonariuszy było możliwe? Odpowiedź należy (oczywiście) dokładnie uzasadnić.



kto co kupił



sieć S_2

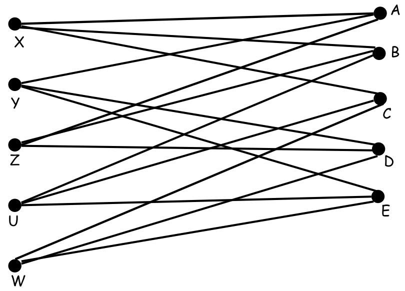
B4. Dane są liczby $k_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ oraz $r_j \in \{0, 1, 2, 3\}$, dla $i = X, Y, Z, U, W$ oraz $j = A, B, C, D, E$. Pięciu krasnoludków X, Y, Z, U, W, chce rozesłać prezenty do rodzin A, B, C, D, E wg następujących zasad:

(a) Krasnoludek i musi wysłać dokładnie k_i prezentów, dla $i = X, Y, Z, U, W$.
(b) Rodzina j musi dostać dokładnie r_j prezentów, dla $j = A, B, C, D, E$.
(c) Każdy krasnoludek może wysłać każdej z rodzin co najwyżej jeden prezent.
(d) Na rysunku po lewej stronie zaznaczono krawędziami, który krasnoludek której rodzinie może wysłać prezent.

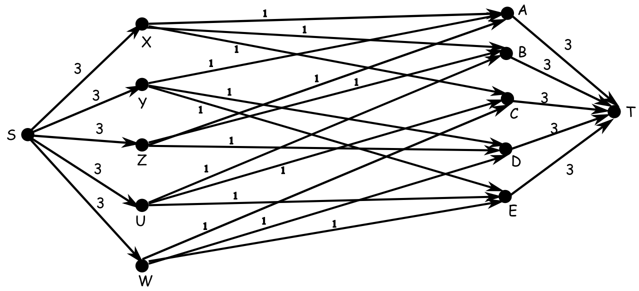
Załóżmy, że takie rozesłanie prezentów jest możliwe i wiadomo, jak krasnoludki powinny rozesłać prezenty. Czy wynika z tego, że w sieci S_2 po prawej istnieje przepływ o wartości

$$r_A + r_B + r_C + r_D + r_E\,?$$

Jeśli nie, to uzasadnij dlaczego; jeśli tak, to opisz ten przepływ.



kto komu może wysłać prezent



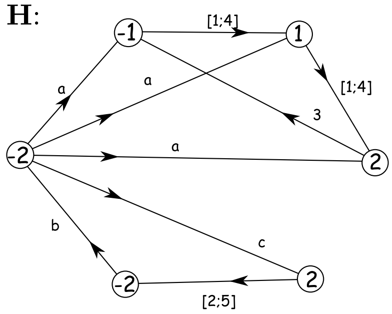
sieć S_2

Uwaga: Liczby $k_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ oraz $r_j \in \{0, 1, 2, 3\}$ są dowolne i nie muszą być równe 3.

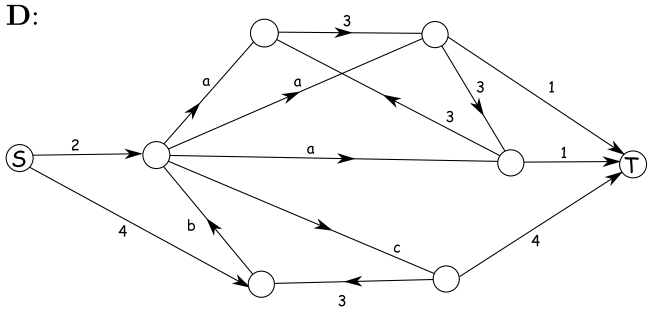
B5. Rozważmy poniższą korespondencyjną sieć H hobbistów, wysyłających sobie kartki z pozdrowieniami. Każdemu człowiekowi (wierzchołkowi) przypisano liczbę całkowitą, która mówi, jaka musi być różnica między liczbą kartek przez niego otrzymanych i wysłanych. Innymi słowy, ujemne zapotrzebowanie wierzchołka oznacza, że hobbista ma więcej kartek wysłać niż dostać, a dodatnie – że więcej kartek powinien dostać niż wysłać. Krawędziom między hobbistami przypisano nieujemne liczby całkowite, z których – jak widać – tylko niektóre są nam znane. Pojedyncza liczba przypisana krawędzi (i, j) ogranicza z góry liczbę kartek, jakie hobbista i może wysłać hobbiście j. Jeżeli krawędzi przypisano dwie liczby, to są one ograniczeniami odpowiednio dolnymi i górnymi na dopuszczalną liczbę wysłanych kartek.
Mówimy, że H może w rzeczywistości zadziałać, jeżeli ludzie mogą wysłać i dostać kartki zgodnie ze swoimi zapotrzebowaniami (i wymaganiami na krawędziach).
Ustalmy sieć hobbistów H taką jak na rysunku H. Obok widzimy standardową sieć D ze źródłem S i ujściem T.

(a) Załóżmy, że korespondencyjna sieć H może w rzeczywistości zadziałać. Co na tej podstawie można powiedzieć o największym przepływie w sieci D?
(b) Załóżmy, że wartość największego przepływu w sieci D wynosi 5. Co możemy powiedzieć na temat możliwości zadziałania sieci hobbistów H?

H:



D:



B6. Jak za pomocą algorytmu wyznaczającego największy przepływ wyznaczyć największe skojarzenie w grafie dwudzielnym?

B7.* Jesteś szefem firmy informatycznej i rozważasz rozpoczęcie kilku projektów. Między projektami są pewne zależności, tzn. wdrożenie jednego wymaga być może wdrożenia najpierw kilku innych. Wykonanie danego projektu oznacza albo niezerowe koszty, albo niezerowe zyski, przy czym wykonanie czegoś kosztownego może umożliwić wdrożenie czegoś niezwykle zyskownego. Możesz zdecydować, że firma wykona tylko część projektów, ale oczywiście nie można zdecydować, że zajmie się tylko projektami ze zbioru A, jeśli jakiś projekt konieczny do ich wykonania jest z A wyłączony. Zakładamy, że spełnione są następujące warunki.

- Projekt nie może generować jednocześnie zysku i kosztów. Jeśli generuje zysk, nazywamy go zyskownym, a jeśli generuje koszt, to nazywamy go kosztownym.
- Jeśli projekt x jest konieczny do wykonania projektu y, to x jest kosztowny, a y zyskowny.

Twoim zadaniem jest wybrać jak najlepiej zbiór projektów do realizacji, znając powiązania między projektami, przewidywane profity i koszty generowane przez każdy projekt z osobna. Celem jest jak najlepszy wynik finansowy po zakończeniu wszystkich projektów.
Zaprojektuj algorytm, bazując na gotowym algorytmie znajdującym największy przepływ i najmniejsze cięcie w standardowych sieciach z jednym źródłem i jednym ujściem.