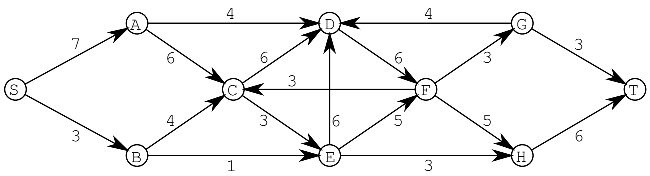
TPI 7

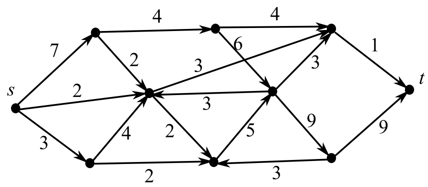
Przepływy w sieciach

Zadania na ćwiczenia

Zad.1. Znajdź największy przepływ i najmniejsze cięcie w poniższej sieci. Uzasadnij poprawność rozwiązania. Cięcie proszę wskazać za pomocą odpowiedniego podziału zbioru wierzchołków.



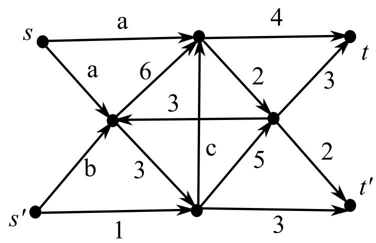
Zad.2. Oszacuj najlepiej jak potrafisz (z góry i z dołu) pojemność najmniejszego cięcia i wartość największego przepływu w podanej sieci.



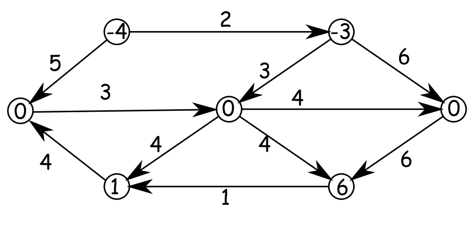
Zad.3. Rozważmy pewną sieć.

(a) Załóżmy, że wartość największego przepływu wynosi 10. Czy istnieje w rozważanej sieci cięcie o pojemności 8?

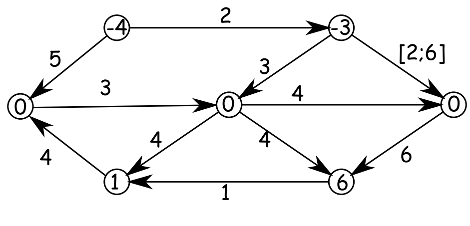
(b) Załóżmy, że pojemność najmniejszego cięcia w sieci wynosi 10. Czy każdy przepływ w tej sieci ma wartość mniejszą niż 12?



Zad.4. Załóżmy, że chcemy znaleźć największy przepływ w podanej nietypowej sieci D_1 z wieloma źródłami i ujściami. Przetłumacz problem na równoważny mu problem znalezienia odpowiedniego przepływu w standardowej sieci z jednym ujściem i jednym źródłem.



Zad.5. Chcemy rozstrzygnąć, czy w podanej nietypowej sieci istnieje dopuszczalny przepływ, w którym są spełnione zapotrzebowania wierzchołków. Liczby w wierzchołkach oznaczają zapotrzebowania: ujemne oznaczają, że wierzchołek chce o tyle więcej „dać" a dodatnie, że chce o tyle więcej „dostać". Liczby na krawędziach oznaczają, jak zwykle, pojemność krawędzi. Przetłumacz problem na równoważny mu problem znalezienia odpowiedniego przepływu w standardowej sieci z jednym ujściem i jednym źródłem, w której zapotrzebowanie wszystkich wierzchołków (poza ujściem i źródłem) wynosi 0.



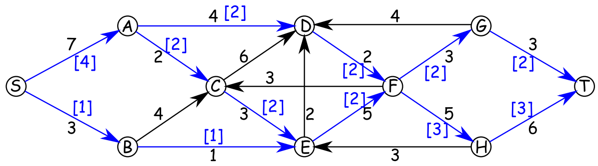
Zad.6. (rezerwowe) A to jeszcze bardziej nietypowa sieć. Pojemność jednej krawędzi jest ograniczona z dołu i z góry podanymi liczbami. Podobnie jak w poprzednim zadaniu, przetłumacz problem znalezienia dopuszczalnego przepływu w tej dziwnej sieci na równoważny mu problem znalezienia odpowiedniego przepływu w standardowej sieci.

Zadania domowe, przygotowujące do kartkówki (która odbędzie się dopiero 9.05)

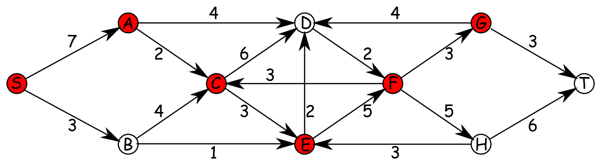
ZOT jest nieobowiązkowy; zainteresowani oddają na ćwiczeniach jego pisemne rozwiązanie.

W zadaniach domowych „sieć" oznacza standardową sieć, z jednym źródłem i jednym ujściem.

A1. Jadran postanowił zdefiniować przykładowy przepływ w podanej sieci. Dla jasności obrazu Jadran pomalował na niebiesko krawędzie, którym – budując przepływ – przyporządkował wartości dodatnie. Liczby bez nawiasów oznaczają pojemności krawędzi, liczby w nawiasach to wartości przyporządkowane krawędziom przez Jadrana. Brak liczby w nawiasie nad krawędzią oznacza, że Jadran przyporządkował jej wartość 0. Czy Jadran poprawnie zdefiniował przepływ? Jeżeli tak, to wyznacz wartość przepływu; jeżeli nie, to popraw jak najmniej wartości w nawiasach kwadratowych w taki sposób, by otrzymać przepływ.



A2.



(a) Oblicz pojemność cięcia wyznaczonego przez podany podział (X, Y), gdzie X to zbiór wierzchołków czerwonych, a Y – zbiór pozostałych wierzchołków sieci.

(b) Czy (X, Y) jest najmniejszym cięciem? Jeśli tak, to uzasadnij; jeśli nie – wskaż lepszy podział.

A3. Rozważmy pewną sieć.

(a) Załóżmy, że w sieci istnieje pewne cięcie o pojemności 10. Jakie wynika z tego oszacowanie na wartość największego przypływu?

(b) Załóżmy, że w sieci istnieje pewien przepływ o wartości 8. Jakie wynika z tego oszacowanie na pojemność najmniejszego cięcia?

A4. Najmniejsze cięcie w pewnej sieci jest wyznaczone przez trzy strzałki: (a, b) o pojemności 3, (c, d) o pojemności 4 i (a, d) o pojemności 2, przy czym wierzchołki a, c leżą po stronie źródła, a wierzchołki b i d po stronie ujścia.

(a) Ile wynosi największy przepływ w tej sieci?

(b) Czy jeśli zwiększymy o jeden pojemności każdej ze strzałek (a, b), (c, d) i (a, d), to wartość największego przepływu na pewno się zwiększy? Jeżeli tak, to uzasadnij dlaczego; jeżeli nie, to podaj kontrprzykład.

A5. Dana jest sieć D, w której każda krawędź ma pojemność jeden. Załóżmy, że w sieci tej istnieje k ($k \geqslant 1$) krawędziowo rozłącznych ścieżek skierowanych ze źródła do ujścia. Uzasadnij, że:

(a) wartość największego przepływu w D wynosi co najmniej k.

(b) pojemność każdego cięcia w D wynosi przynajmniej k.

A6. Oceń poprawność każdego z poniższych zdań. W każdym przypadku poprzyj odpowiedź, w zależności od potrzeby, uzasadnieniem ogólnym, przykładem lub kontrprzykładem. Poprawność przykładów/kontrprzykładów też należy uzasadnić.

(a) Jeżeli w sieci istnieje cięcie o pojemności 3, to największy przepływ w tej sieci ma wartość 3.

(b) Jeżeli w sieci istnieje przepływ o wartości 2, to najmniejsze cięcie w tej sieci ma pojemność 2.

(c) Jeśli w nietrywialnej sieci zmniejszymy pojemność każdej strzałki, to zmniejszy się pojemność najmniejszego cięcia. (Nietrywialna sieć to taka, w której najmniejsze cięcie ma pojemność dodatnią.)

(d) Jeśli w sieci zwiększymy pojemność każdej strzałki wychodzącej ze źródła, to zwiększy się wartość największego przepływu.

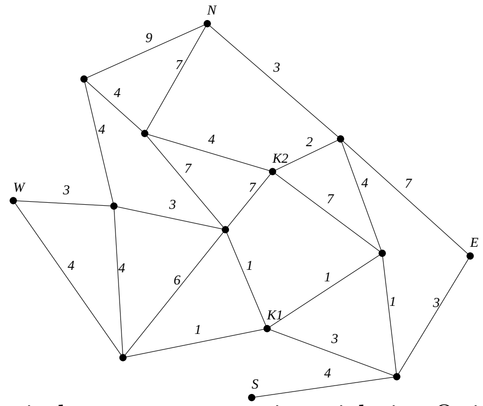
(e) Istnieje sieć, w której są co najmniej dwa różne największe przepływy.

(f) Istnieje sieć, w której są co najmniej dwa różne najmniejsze cięcia.

(g) Jeżeli w sieci są co najmniej dwa różne największe przepływy, to w sieci tej istnieją przynajmniej dwa różne najmniejsze cięcia.

(h) Jeśli w sieci istnieją przynajmniej dwa różne najmniejsze cięcia, to w tej sieci istnieją co najmniej dwa różne największe przepływy.

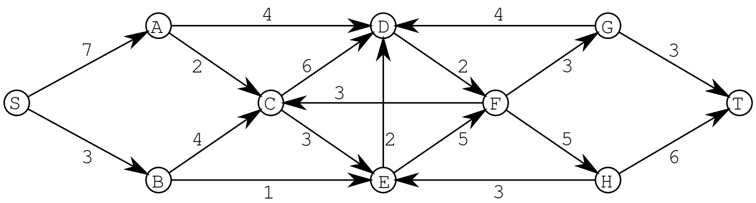
ZOT 5. W mieście ukrywają się przestępcy. Policja zna prawdopodobne miejsca kryjówek przestępców. Przestępcy mogą opuścić miasto jedynie kilkoma wyjazdami, również policji znanymi. Dla każdej ulicy wiadomo, ilu policjantów potrzeba, by ją zablokować. Zadaniem policji jest przeprowadzić skuteczną blokadę ulic przy pomocy jak najmniejszej liczby policjantów. Na rysunku widzimy mapkę miasta. $K1, K2$ to miejsca, w których mogą ukrywają się przestępcy, a W, N, E, S – wyjazdy z miasta. Liczby przy ulicach określają, ilu policjantów potrzeba, by zablokować ulicę. Ulice są dwukierunkowe.



Wyznacz najmniejszą liczbę liczbę policjantów, gwarantującą, że żaden przestępca nie ucieknie. Opisz rozmieszczenie policjantów na ulicach. Nie zapomnij o uzasadnieniu, że mniej policjantów nie wystarczy. Uwaga: W rozwiązaniu nie można powoływać się na wyniki obliczeń komputerowych.

Zadania do samodzielnego rozwiązania później

B1. Znajdź największy przepływ w poniższej sieci. Uzasadnij poprawność rozwiązania, wskazując odpowiednie cięcie.



Jeśli rozwiązanie sprawia Państwu problemy, proszę wykorzystać pomysł ścieżek rozszerzających z wykładu.

B2.

(a) Załóżmy, że w sieci, w której każda krawędź ma pojemność 2, istnieje przepływ o wartości 13. Czy w tej sieci może istnieć cięcie wyznaczone przez sześć strzałek?

(b) Załóżmy, że w sieci, w której każda krawędź ma pojemność 3, istnieje cięcie o pojemności 15, ale nie jest to cięcie najmniejsze. Co można powiedzieć o wartości największego przepływu w tej sieci?

(c) Dana jest sieć D, w której ze źródła wychodzą dokładnie cztery strzałki o pojemnościach równych $1, 1, 1$ i 4. Do ujścia dochodzą również cztery strzałki, każda o pojemności równej 2. Ponadto wiadomo, że najmniejsze cięcie w D jest wyznaczone przez 4 strzałki: pewne dwie spośród strzałek wychodzących ze źródła razem z dwiema spośród strzałek dochodzących do ujścia. Co można powiedzieć o wartości największego przepływu w tej sieci?

B3.

(a) Dana jest sieć D, w której każda krawędź ma pojemność jeden. Uzasadnij, że w D istnieje taki przepływ o największej wartości, że wartość przepływu na każdej z krawędzi wynosi jeden lub zero.

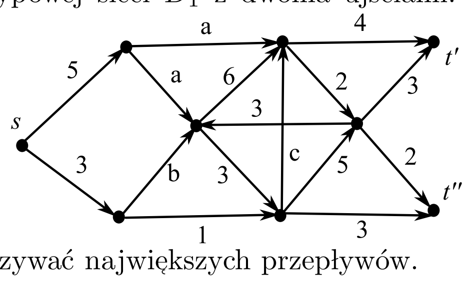
(b) Narysuj przykład sieci, w której każda krawędź ma pojemność jeden, ale istnieje największy przepływ, który na niektórych krawędziach ma wartości niecałkowite.

B4. Załóżmy, że intersuje nas największy przepływ w podanej nietypowej sieci D_1 z dwoma ujściami.

(a) Zbuduj sieć D_2 tradycyjną, czyli z jednym źródłem i jednym ujściem, w której problem znalezienia największego przepływu jest równoważny problemowi największego przepływu w D_1.

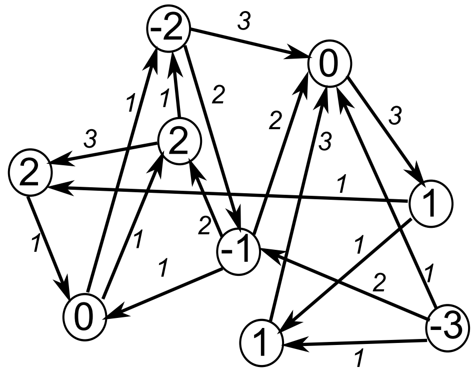
(b) Opisz, w jaki sposób na podstawie największego przepływu w D_2 zdefiniować w D_1 przepływ o wartości $\mathrm{maxflow}(D_2)$.

(c) Opisz, w jaki sposób na podstawie największego przepływu w D_1 zdefiniować w D_2 przepływ o wartości $\mathrm{maxflow}(D_1)$.



Uwaga: Proszę tych problemów nie rozwiązywać, tzn. nie trzeba wskazywać największych przepływów.

B5. Chcemy rozstrzygnąć, czy w podanej nietypowej sieci z podanymi zapotrzebowaniami wierzchołków istnieje dopuszczalny przepływ. Przetłumacz problem na równoważny mu problem znalezienia odpowiedniego przepływu w standardowej sieci, czyli sieci z jednym ujściem i jednym źródłem, w której zapotrzebowanie wszystkich wierzchołków (poza ujściem i źródłem) wynosi 0.
Uwaga: Proszę problemu nie rozwiązywać, tzn. nie szukać dopuszczalnego przepływu.



B6. Chcemy rozstrzygnąć, czy w podanej bardzo nietypowej sieci D istnieje dopuszczalny przepływ, w którym wartość przepływu na każdej krawędzi jest ograniczona z dołu i z góry podanymi liczbami. Tu zapotrzebowania wierzchołków wynoszą zero. Przetłumacz problem na równoważny mu problem znalezienia odpowiedniego przepływu w standardowej sieci, czyli sieci z jednym ujściem i jednym źródłem, w której zapotrzebowanie wszystkich wierzchołków (poza ujściem i źródłem) wynosi 0, a ograniczenia na krawędziach są tylko górne. Jak na podstawie odpowiedniego przepływu w standardowej sieci uzyskać dopuszczalny przepływ dla D?
Uwaga: Proszę problemu nie rozwiązywać, tzn. nie szukać dopuszczalnego przepływu.