TPI – 3

Skojarzenia

Zadania domowe, przygotowujące do kartkówki

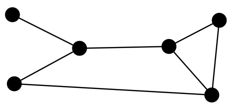
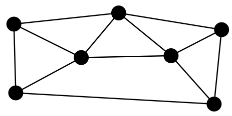
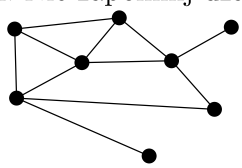
ZOT jest nieobowiązkowy; zainteresowani oddają na ćwiczeniach jego pisemne rozwiązanie.

A1. Kompletujemy załogę lotu w kosmos. W załodze musi być: pilot, nawigator, mechanik, lekarz, psycholog. Każdy członek załogi musi mieć przydzieloną tylko jedną funkcję, każda funkcja musi być pełniona przez tylko jedną osobę. Kandydatami są: Krzysztof, Olga, Piotr, Marek, Adrianna, Jola. Oto lista ludzi, którzy nadają się do poszczególnych zadań:

- pilot: Krzysztof, Olga, Marek
- nawigator: Krzysztof, Marek, Jola
- mechanik: Krzysztof, Marek, Jola
- lekarz: Olga, Piotr, Adrianna, Jola
- psycholog: Krzysztof, Marek

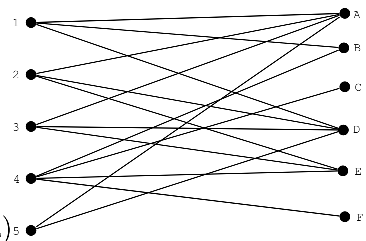
Skompletuj załogę. Nie wszyscy muszą lecieć w kosmos. Prócz rozwiązania podaj interpretację grafową tego problemu.

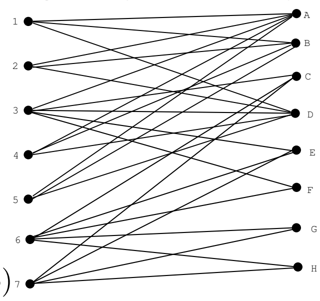
A2. Znajdź największe skojarzenie w podanych grafach. Nie zapomnij uzasadnić, że większe być nie może.

(a)  (b)  (c) 

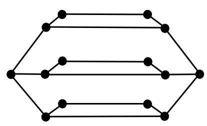
A3. Czy poniższe grafy:

- posiadają skojarzenie nasycające lewy zbiór dwupodziału? Jeśli tak, to je narysuj.
- spełniają warunek Halla z punktu widzenia lewego zbioru dwupodziału? Jeżeli tak, to uzasadnij; jeżeli nie – zaznacz podzbiór, dla którego nie jest spełniony warunek Halla.

(a) 

(b) 

A4. Czy poniższy graf zawiera skojarzenie doskonałe? Jeśli tak, to zaznacz jego krawędzie na rysunku; jeśli nie, zaznacz podzbiór wierzchołków, który pokazuje, że takie skojarzenie nie istnieje (i nie zapomnij o komentarzu).



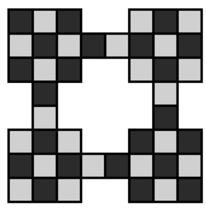
A5.

(a) Narysuj przykładowy graf o 10 wierzchołkach i minimalnym stopniu dwa, który nie zawiera skojarzenia doskonałego.

(b) Na rysunku zaznacz podzbiór S zbioru wierzchołków, dla którego nie jest spełniony warunek Tutte'a i uzasadnij poprawność wyboru.

A6. W pewnej grupie 7 pań i 7 panów każda pani zna **przynajmniej** 3 panów, a każdy pan zna **przynajmniej** 3 panie. Czy w takim „grafie znajomości" zawsze znajdziemy skojarzenie doskonałe? Jeśli tak – uzasadnij dlaczego, jeśli nie – narysuj kontrprzykład i uzasadnij jego poprawność.

A7. Podaną planszę chcemy pokryć kostkami domina 1×2 tak, by każde pole było przykryte, a kostki nie nachodziły na siebie i nie wystawały poza planszę. Podaj interpretację grafową tego problemu. Nie rozwiązuj go.



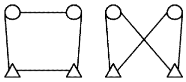
A8. Oceń poprawność każdego z poniższych zdań. W każdym przypadku poprzyj odpowiedź, w zależności od potrzeby, uzasadnieniem ogólnym, przykładem lub kontrprzykładem.

(a) Istnieje graf, który jest grafem Eulera i grafem Hamiltona, ale nie ma skojarzenia doskonałego.

(b) Istnieje graf, który jest grafem Eulera i ma skojarzenie doskonałe, a nie jest grafem Hamiltona.

(c) Istnieje graf, który jest dwudzielny, hamiltonowski, 4-regularny, ale nie ma skojarzenia doskonałego.
(d) Cykl na 10 wierzchołkach ma skojarzenie doskonałe.
(e) Graf hamiltonowski na 10 wierzchołkach ma skojarzenie doskonałe.
(f) Istnieje graf hamiltonowski o parzystej liczbie wierzchołków, który nie ma skojarzenia doskonałego.

ZOT 1. W tańcu ludowym tancerze stoją w dwóch rzędach: w jednym rzędzie 10 dziewcząt, w drugim – 10 chłopców. Każdy z tancerzy podaje lewą rękę osobie stojącej naprzeciw, lub sąsiadowi z lewej strony, lub osobie stojącej naprzeciw sąsiada zlewej strony. Analogiczna reguła dotyczy prawej ręki. Wyznacz liczbę możliwych układów rąk.
Przykład: Gdyby w zadaniu była mowa o dwóch parach (dwie dziewczęta i dwóch chłopców), to rozwiązaniem byłyby dwa układy:



TPI – 3
Skojarzenia

Zadania na ćwiczenia

Zad.1. Niech $k \geqslant 1$ będzie liczbą naturalną. O znajomościach w pewnej grupie pań i panów mamy poniższe dane. Oceń w każdym przypadku, czy w grafie znajomości zawsze znajdziemy skojarzenie nasycające zbiór pań.
(a) Każda pani zna dokładnie k panów, a każdy pan zna dokładnie k pań.
(b) Każda pani zna przynajmniej k panów, a każdy pan zna przynajmniej k pań.
(c) Każda pani zna przynajmniej k panów, a każdy pan zna co najwyżej k pań.

Zad.2. Rozwiąż problem z zadania domowego A7.

Zad.3. Czy istnieje graf o ciągu stopni wierzchołków (6,6,5,5,4,4,4,4), który nie ma skojarzenia doskonałego?

Zad.4. Dana jest macierz zero-jedynkowa $n \times m$, taka że każdy wiersz i każda kolumna zawiera dokładnie k jedynek ($k \geqslant 1$). Uzasadnij, że można wybrać w tej macierzy n jedynek tak, by każda kolumna i każdy wiersz zawierały tylko jedną z wybranych jedynek.

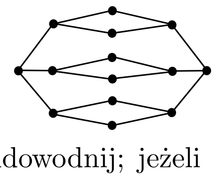
Zad.5. Załóżmy, że z grafu G usunięto trzy wierzchołki wraz z incydentnymi do nich krawędziami i w wyniku tej operacji powstał graf składający sie z pięciu wierzchołkowo rozłącznych trójkątów. Czy mogło się zdarzyć, że G zawierał skojarzenie doskonałe? Jeżeli tak, to podaj przykład i uzasadnij jego poprawność; jeżeli nie – uzasadnij dlaczego.

Zad.6. Dla każdego $k \geqslant 2$ podaj przykład grafu k-regularnego, który nie ma skojarzenia doskonałego.

Zad.7. Czy dla każdego $k \geqslant 1$ k-kostka ma skojarzenie doskonałe?

Zadania do samodzielnego rozwiązania później

B1. Czy podany graf zawiera skojarzenie doskonałe? Jeśli tak, to zaznacz jego krawędzie na rysunku, jeśli nie, zaznacz podzbiór wierzchołków, który pokazuje, że takie skojarzenie nie istnieje.



B2. Oceń poprawność poniższych zdań. Jeżeli zdanie jest poprawne, to je udowodnij; jeżeli nie – podaj kontrprzykład i uzasadnij poprawność kontrprzykładu.
(a) Jeżeli dwudzielny graf G ma dwupodział (X, Y), minimalny stopień 2 i $|X| = |Y| = 5$, to G zawiera skojarzenie doskonałe.
(b) Jeżeli graf o 14 wierzchołkach jest 2-regularny, to zawiera skojarzenie doskonałe.

B3. Narysuj przykładowy graf
(a) G o 8 wierzchołkach i dwupodziale (X, Y), który jest spójny, w którym $|X| = |Y| = 4$ i G **nie** zawiera skojarzenia nasycającego wszystkie wierzchołki ze zbioru X. Na rysunku zaznacz podzbiór zbioru X, dla którego nie jest spełniony warunek Halla.
(b) o 8 wierzchołkach i minimalnym stopniu trzy, który nie zawiera skojarzenia doskonałego. Na rysunku zaznacz podzbiór wierzchołków S, dla którego nie jest spełniony warunek Tutte'a.

(c) 3-regularny, który nie posiada skojarzenia doskonałego. Wskaż podzbiór wierzchołków tego grafu, dla którego nie jest spełniony warunek Tutte'a.

B4. Dany jest graf dwudzielny G o dwupodziale $X \cup Y$, w którym wierzchołki z X i z Y mają stopnie odpowiednio:

(a) $(6, 5, 3, 2, 2, 1)$ i $(5, 5, 3, 2, 2, 1, 1)$.
(b) $(6, 5, 4, 3, 2, 1)$ i $(5, 5, 4, 3, 2, 1, 1)$.
(c) $(3, 3, 3, 3, 3)$ i $(4, 4, 3, 2, 1, 1)$.

Czy G musi zawierać skojarzenie nasycające wszystkie wierzchołki z X?

B5. Każdemu z niepustej grupy K krasnoludów chcemy przydzielić dokładnie jedną pracę do wykonania, z niepustego zbioru prac P, ale musi to być praca, którą krasnolud umie wykonać. Ponadto nie możemy przydzielić tej samej pracy kilku krasnoludom. Zinterpretuj problem w języku grafów. Następnie oceń, czy zawsze istnieje opisany przydział prac, gdy jedyne założenia dodatkowe są takie:

(a) $|P| = |K|$, każdy krasnolud potrafi wykonać co najwyżej 3 prace, a każda praca nadaje się dla co najwyżej 3 krasnoludów.
(b) $|P| = |K|$, każdy krasnolud potrafi wykonać co najmniej 3 prace, a każda praca nadaje się dla co najmniej 3 krasnoludów.
(c) $|P| = |K|$, każdy krasnolud potrafi dokładnie 3 prace, a każda praca nadaje się dla dokładnie 3 krasnoludów.
(d) $|P| > |K|$, każdy krasnolud potrafi wykonać co najwyżej 3 prace, a każda praca nadaje się dla co najmniej 3 krasnoludów.
(e) $|P| > |K|$, każdy krasnolud potrafi wykonać przynajmniej 3 prace, a każda praca nadaje się dla co najwyżej 3 krasnoludów.
(f) $|P| > |K|$, każdy krasnolud potrafi wykonać dokładnie 3 prace, a każda praca nadaje się dla dokładnie 3 krasnoludów.

B6. W pewnym mieście działa 15 organizacji zrzeszających mieszkańców, a każda liczy przynajmniej 6 członków. Wiadomo, że każdy mieszkaniec miasta jest zapisany do nie więcej niż 6 organizacji.

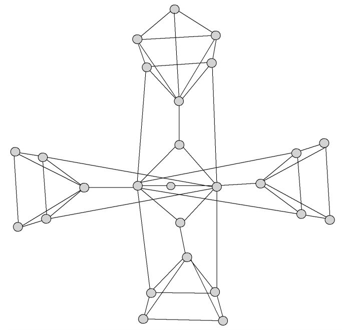
(a) Wykaż, że można wybrać szefów tych organizacji tak, aby każda organizacja miała innego szefa.
(b) Zinterpretuj problem w języku grafów.

B7. Udowodnij, że binarna macierz wymiaru $n \times n$ zawiera n jedynek, z których żadne dwie nie leżą w tym samym wierszu ani w tej samej kolumnie wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podmacierzy M wymiaru $k \times (n - k + 1)$, dla $k = 1, \ldots, n$, w której są same zera. Kolumny i wiersze podmacierzy M nie muszą być kolejnymi kolumnami/wierszami macierzy wyjściowej. Zinterpretuj problem grafowo.

B8. Załóżmy, że w macierzy binarnej $n \times n$ w każdym rzędzie i wierszu jest po k jedynek $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Czy wynika z tego, że można pokolorować jedynki k kolorami tak, aby żadne dwie jedynki tego samego koloru nie znajdowały się w tym samym rzędzie ani w tej samej kolumnie?

B9. Wybrano dowolnie 16 pól szachownicy, ale tak, by każda linia zawierała 2 z nich. Wykaż, że na wybranych polach można ustawić 16 pionków, przy czym mamy do wybory pionki białe i czarne, tak by każda linia zawierała pionki obu kolorów. Przez linie rozumiemy kolumny i wiersze. Zinterpretuj problem grafowo.

B10. Czy w podanym grafie istnieje skojarzenie doskonałe? Jeśli nie – uzasadnij, jeśli tak – narysuj je.



B11. Niech G będzie grafem dwudzielnym o dwupodziale (X, Y), gdzie $|X| = |Y|$. Przypuśćmy, że dla pewnego podzbioru W zbioru X mamy $|N(W)| < |W|$, tzn. graf G nie spełnia warunku Halla, a zatem nie ma skojarzenia doskonałego. Znajdź w G zbiór S, który nie spełnia warunku Tutte'a.

B12. Podaną planszę chcemy pokryć kostkami domina 1×2 tak, by każde pole było przykryte, a kostki nie nachodziły na siebie i nie wystawały poza planszę. Zinterpretuj problem grafowo i rozwiąż.