TPI – 2

minory, planarność, liczba chromatyczna

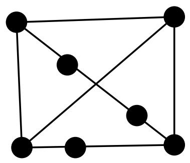
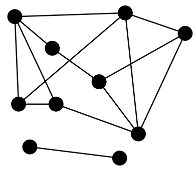
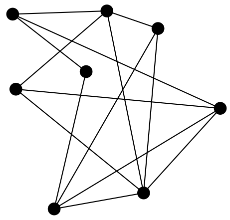
## Zadania domowe, przygotowujące do kartkówki

**A1.** Chcemy wysłać dużą partię towarów, pakując je w paczki. Wprawdzie do jednej paczki zmieściłyby się wszystkie towary, ale ze względów bezpieczeństwa nie każdy może podróżować z każdym w jednej paczce. Wiemy, jakie towary możemy zapakować razem, a jakie nie. Naszym celem jest wyznaczyć ile najmniej paczek potrzeba do transportu. Zinterpertuj problem w języku grafów. Jaki parametr grafowy nas interesuje?

**A2.** Narysuj przykład mapy, której nie można w sposób właściwy pomalować, mając do dyspozycji 3 kolory.

**A3.** Wyznacz liczbę chromatyczną obu grafów z podpunktu (2), z końca listy nr 0 (*Rozgrzewka grafowa*).

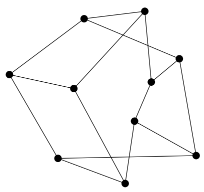
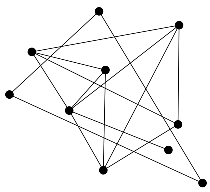
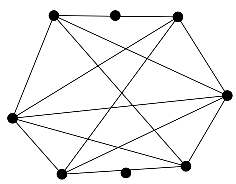
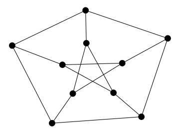
**A4.** W podanych grafach zaznacz podgraf, będący topologiczną kopią (podziałem) grafu $K_4$.

(a)  (b)  (c) 

**A5.** Narysuj graf, który nie zawiera $K_5$, ale zawiera topologiczną kopię $K_5$.

**A6.** Uzasadnij, nie korzystając ani z twierdzenia Kuratowskiego, ani z twierdzenia Wagnera, że wszystkie grafy na 5 wierzchołkach, oprócz $K_5$, są planarne.

**A7.** Zbadaj planarność poniższych grafów. Jeśli graf jest planarny, to narysuj go płasko, czyli tak, by żadne dwie krawędzie nie miały punktów wspólnych (z wyjątkiem końców). Jeżeli graf nie jest planarny, to albo znajdź w nim topologiczną kopię jednego z grafów $K_{3,3}$ lub $K_5$, albo uzasadnij, że zawiera $K_{3,3}$ lub $K_5$ jako minor.

(a) 3-kostka (b)  (c)  (d)  (e) 

**Definicja.** Graf o liczbie chromatycznej co najwyżej $k$ nazywamy grafem $k$-kolorowalnym.

**A8.** Oceń poprawność każdego z poniższych zdań. W każdym przypadku poprzyj odpowiedź, w zależności od potrzeby, uzasadnieniem ogólnym, przykładem lub kontrprzykładem.

(a) Jeżeli graf nie zawiera ani $K_5$, ani $K_{3,3}$, to jest planarny.
(b) Dla ustalonego spójnego grafu planarnego każdy jego płaski rysunek ma tyle samo ścian.
(c) Jeżeli graf jest 4-kolorowalny, to jest planarny.
(d) Jeżeli graf jest planarny, to jest 4-kolorowalny.
(e) Z wzoru Eulera wynika, że nie istnieje graf płaski (czyli płasko narysowany graf planarny), który ma dokładnie 6 wierzchołków, 6 krawędzi i 3 ściany.
(f) Istnieje graf planarny $G$, dla którego $v(G) = 7$ i $e(G) = 15$.
(g) Spójny graf płaski o 10 wierzchołkach i 5 ścianach ma 13 krawędzi.
(h) Triangulacja na 100 wierzchołkach ma 294 krawędzie.
(i) Istnieje graf planarny $G$, dla którego $v(G) = 100$ i $e(G) = 293$.

TPI – 2

minory, planarność, liczba chromatyczna

## Zadania na ćwiczenia

**Zad.1.**

(a) Czy pełny graf dwudzielny $K_{3,3}$ zawiera jako minor graf $K_4$?
(b) Czy pełny graf dwudzielny $K_{8,4}$ zawiera jako minor graf $K_5$?
(c) Czy pełny graf dwudzielny $K_{8,8}$ zawiera jako minor graf $K_{10}$?

**Zad.2.** Czy poniżej podana własność grafowa jest zamknięta na branie minora? Jeśli tak, to podaj możliwie jak najmniejszy zbiór minorów zakazanych dla tej własności. Jeśli nie, to podaj kontrprzykład.

(a) Graf jest dwudzielny.
(b) Graf nie zawiera $K_6$ jako minora.
(c) Graf zawiera co najwyżej jeden cykl.
(d) Graf zawiera dokładnie jeden cykl.

**Zad.3.** Podaj interpretację grafową następującego problemu. Jakiego parametru grafowego tu szukamy? *Układamy plan sesji egzaminacyjnej tak, by każdy student miał co najwyżej jeden egzamin w ciągu dnia. Chcemy znaleźć najmniejszą możliwą liczbę dni potrzebną na zaplanowanie wszystkich egzaminów.*

**Zad.4.** Oceń poprawność każdego z poniższych zdań. W każdym przypadku poprzyj odpowiedź, w zależności od potrzeby, uzasadnieniem ogólnym, przykładem lub kontrprzykładem.

(a) Jeśli $e(G) < 3v(G) - 6$, to $G$ jest planarny.
(b) Jeśli $e(G) > 3v(G) - 6$, to graf $G$ nie jest planarny.
(c) Jeśli graf $G$ ma przynajmniej 3 wierzchołki i wiecej niż $3v(G) - 6$ krawędzi, to $G$ nie jest planarny.
(d) Istnieje graf planarny $G$, dla którego $\delta(G) = 6$.
(e) Dla każdego $s \geqslant 100$ istnieje triangulacja o $s$ ścianach.
(f) Każdy graf dwudzielny jest 2-kolorowalny.
(g) Każdy graf dwudzielny ma liczbę chromatyczną 2.
(h) Liczba chromatyczna cyklu nieparzystego wynosi 3.
(i) Każdy graf planarny ma liczbę chromatyczną 4.

---

## Zadania do samodzielnego rozwiązania później

**B1.** Wyznacz wszystkie $k$, dla których $k$-kostka jest grafem planarnym.

**B2.** Uzasadnij, nie korzystając ani z twierdzenia Kuratowskiego, ani z twierdzenia Wagnera, że wszystkie grafy dwudzielne na 6 wierzchołkach, prócz $K_{3,3}$, są planarne.

**B3.**

(a) Ile ścian ma triangulacja na $n$ wierzchołkach?
(b) Ile wierzchołków ma triangulacja o 100 ścianach?
(c) Załóżmy, że pewna triangulacja ma 496 ścian. Ile ma wierzchołków?
(d) Czy dopełnienie triangulacji może być grafem, którego płaski rysunek jest triangulacją?

**B4.** Czy poniżej podana własność grafowa jest zamknięta na branie minora? Jeśli tak, to podaj możliwie jak najmniejszy zbiór minorów zakazanych dla tej własności. Jeśli nie, to podaj kontrprzykład.

(a) Graf jest planarny.
(b) Graf jest drzewem.
(c) Graf nie zawiera $K_6$.
(d) Graf nie jest planarny.
(e) Graf jest dwudzielny.
(f) Graf nie zawiera trójkątów (tj. kopii $K_3$).
(g) Graf nie zawiera $K_3$ jako minora.
(h) Graf zawiera co najwyżej dwa cykle.

**B5.** Wyznacz liczbę chromatyczną:

(a) każdego niepustego drzewa,
(b) kraty $5 \times 5$,
(c) kraty $5 \times 5$ (czyli o 25 wierzchołkach), w której połączono krawędzią lewy dolny wierzchołek z prawym górnym wierzchołkiem, a prawy dolny – z wierzchołkiem lewym górnym.

**B6.** Uzasadnij (nie korzystając z żadnych twierdzeń), że

(a) Jeżeli graf jest 2-kolorowalny, to nie zawiera nieparzystych cykli.
(b) Jeżeli graf nie zawiera nieparzystych cykli, to jest 2-kolorowalny.

**B7.** W jaki sposób pokolorować w sposób właściwy wierzchołki

(a) dowolnej ścieżki, mając dwa kolory?
(b) dowolnego drzewa, mając dwa kolory?
(c) dowolnego grafu, którego maksymalny stopień wynosi 3, mając cztery kolory?

Opisz ideę algorytmu.

**B8.** Oceń poprawność każdego z poniższych zdań. W każdym przypadku poprzyj odpowiedź, w zależności od potrzeb, uzasadnieniem ogólnym, przykładem lub kontrprzykładem.

(a) Jeśli $e(G) > 3v(G) - 6$ i $v(G) < 3$, to graf $G$ jest planarny.
(b) Istnieje graf planarny $G$, dla którego $v(G) = 100$ i $e(G) = 296$.
(c) Istnieje graf planarny $G$, dla którego $v(G) = 100$ i $e(G) = 190$.
(d) Jeśli graf zawiera topologiczną kopię grafu $K_5$, to zawiera jako minor graf $K_5$.
(e) Jeśli graf zawiera jako minor graf $K_5$, to zawiera topologiczną kopię grafu $K_5$.
(f) Jesli graf zawiera $K_{3,3}$ jako minor lub $K_5$ jako minor, to zawiera topologiczną kopię grafu $K_{3,3}$ lub topologiczną kopię grafu $K_5$.
(g) Jeśli graf $G$ zawiera $K_4$ jako minor, to $\chi(G) \geqslant 4$.
(h) Istnieje graf $G$, dla którego $\chi(G) \geqslant 4$, a który nie zawiera $K_4$.
(i) Nie istnieje spójny graf płaski (czyli płasko narysowany grafu planarny), który ma dokładnie 100 wierzchołków, 150 krawędzi i 50 ścian.
(j) Dopełnienie spójnego grafu płaskiego o 20 wierzchołkach i 30 ścianach ma 142 krawędzie.
(k) Twierdzenie odwrotne do twierdzenia o czterech kolorach jest prawdziwe.
(l) Istnieje graf planarny o przynajmniej 11 wierzchołkach, którego dopełnienie jest grafem planarnym.