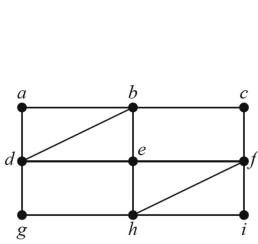
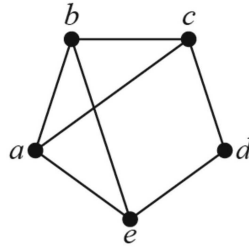


**Zadania na ćwiczenia**

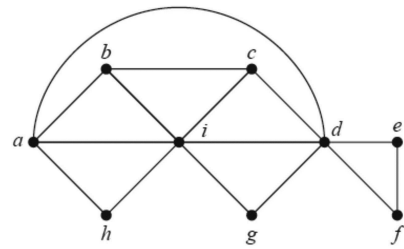
**Zad.1.** Który z poniższych grafów ma: szlak Eulera? obchód Eulera?



(a)

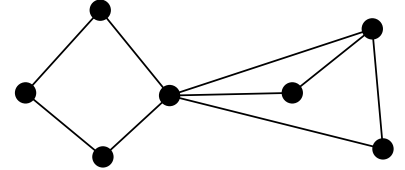


(b)



(c)

**Zad.2.** Znajdź szlak Eulera w podanym grafie, korzystając z algorytmu Fleury'ego.



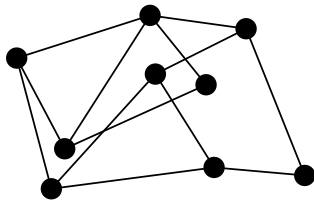
**Zad.3.** Pomysłowy Dobromir zaprojektował taki algorytm sprawdzający, czy graf jest eulerowski:

W macierzy przyległości grafu sumujemy wyrazy w każdym wierszu. Jeżeli wszystkie otrzymane sumy są parzyste, algorytm zwraca odpowiedź *tak, jest eulerowski*; w przeciwnym wypadku zwraca *nie*.

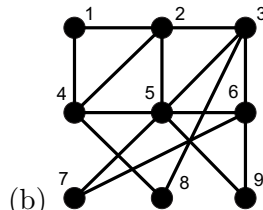
Oceń poprawność tego algorytmu.

**Zad.4.** Czy istnieje graf, który: jest grafem Eulera, ma parzystą liczbę wierzchołków i nieparzystą liczbę krawędzi, który w dodatku jest regularny?

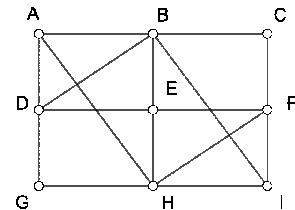
**Zad.5.** Zbadaj, czy dane grafy są hamiltonowskie:



(a)



(b)



(c)

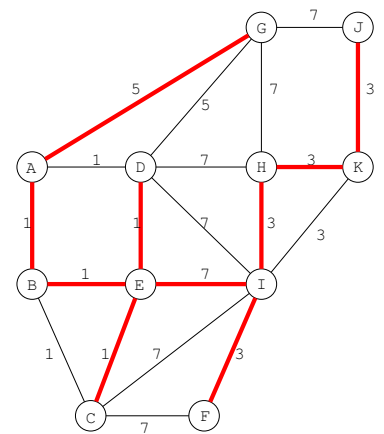
**Zad.6.** Zinterpretuj poniższy problem w języku grafów.

Czy można obejść szachownicę  $n \times n$  koniem szachowym tak, aby

- (a) każde pole odwiedzić dokładnie raz?
- (b) każde pole odwiedzić dokładnie raz i wrócić na miejsce startu?

**Zad.7.** Na rysunku zaznaczono na czerwono pewne drzewo rozpięte w grafie z wagami.

- (a) Czy jest to minimalne drzewo rozpięte?
- (b) Czy graf spełnia warunek trójkąta?
- (c) Czy spełnia warunek  $MST \leq TSP \leq 2MST$ ?
- (d) Oszacuj najlepiej jak potrafisz rozwiązanie TSP dla tego grafu (z góry i z dołu).



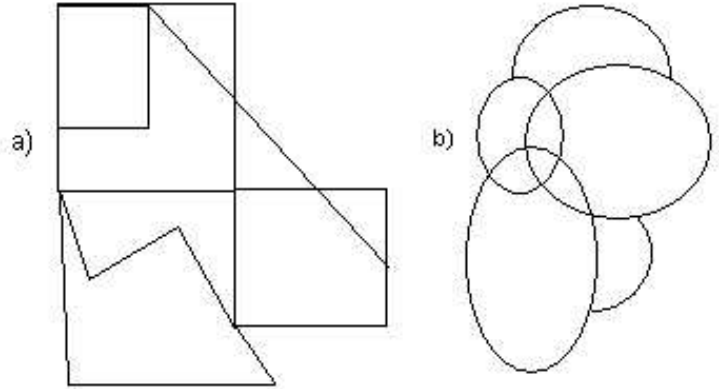
**Zad.8.** Ile różnych cykli Hamiltona jest w pełnym grafie

- (a) na 4 wierzchołkach? Narysuj je wszystkie.
- (b) na  $n$  wierzchołkach ( $n \geq 3$ )?

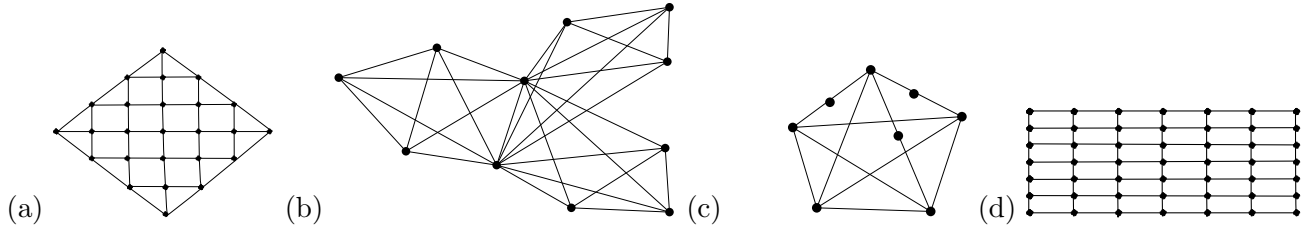
**Zad.9.** Rozwiąż problem z zadania 6(b) dla (a)  $n = 6$ , (b)  $n = 9$ .

## Zadania do samodzielnego rozwiązania później

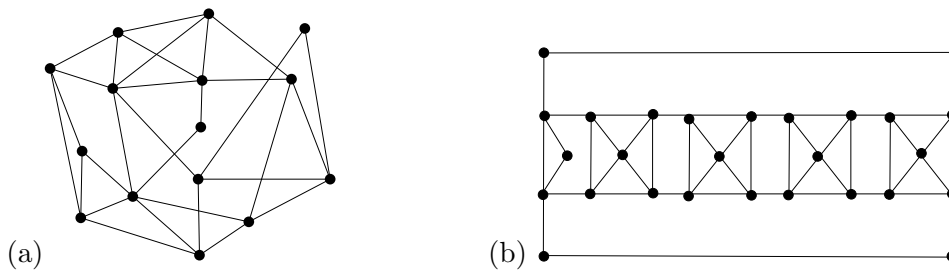
**B1.** Który z zamieszczonych obok rysunków można narysować bez odrywania ołówka od kartki tak, by nie przesuwając ołówka po linii już narysowanej? Przez punkty przecięć linii można przechodzić wielokrotnie. Jeśli można taki rysunek zrobić, wskaż, w którym punkcie powinniśmy zacząć, a w którym zakończyć rysowanie linii; jeśli nie jest to możliwe – wyjaśnij dlaczego. Podaj interpretację grafową tego problemu.



**B2.** Czy poniższe grafy posiadają cykl Hamiltona? Jeśli tak, to go wskaż. Jeśli nie, to uzasadnij dlaczego.



**B3.** Przespaceruj się po poniższych grafach, stosując algorytm Fleury'ego. Zaznacz na rysunku, w jakiej kolejności będą odwiedzane krawędzie.



**B4.** Dla jakich  $k \geq 1$   $k$ -kostka jest grafem Eulera?

**B5.** Załóżmy, że dla grafu pełnego na  $n$  wierzchołkach komputer wypisuje różne jego cykle Hamiltona z szybkością 1 mln cykli na sekundę. Ile czasu będziemy czekać na wypisanie wszystkich cykli Hamiltona dla:  $n = 10$ ?  $n = 20$ ?

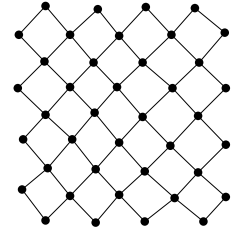
**B6.** Czy można ułożyć CAR, SAW, SON, HEN, RED, DIM, WIT, HUT, MOB, CUB na cyklu tak, aby każde dwa kolejne wyrazy miały wspólną literę?

- (a) Zinterpretuj problem grafowo.  
 (b)\* Rozwiąż go.

**B7.** Biolog bada bardzo długi łańcuch DNA. Interesuje go, z jakich kolejno nukleotydów składa się łańcuch. Udało mu się zsekwencjonować (odczytać) dużo krótkich fragmentów łańcucha, ponadto wie, że fragmenty te pokrywają cały łańcuch, a niektóre pary się przecinają. Teraz chciałby odtworzyć z nich łańcuch początkowy. Przewidywaną kolejność nukleotydów uważa za prawdopodobną, jeżeli powstaje ona z wszystkich zsekwencjonowanych krótkich łańcuchów, tak kolejno ułożonych, że przynajmniej dwa pierwsze nukleotydy kolejnego łańcucha są ostatnimi w łańcuchu poprzednim. Znajdź co najmniej jeden prawdopodobny długi łańcuch zbudowany z fragmentów (o ile istnieje; mogło się zdarzyć, że biolog zapomniał zapisać jakichś odczytanych sekwencji): TGG, ATTA, GGAA, GGC, TAC, TATT, CATT, GCGG, TACTA, AAAC, TTG, ACA, AACAA.

Zinterpretuj problem grafowo dla  $n$  zsekwencjonowanych fragmentów.

**B8.** Graf  $G$  wygląda jak kratka zbudowana z „kopniętych kwadratów”, w której na przemian występują wiersze/kolumny  $n$  i  $n - 1$  oczek. Przykład dla  $n = 4$  pokazano na rysunku. Na jednej z krawędzi jest ukryty skarb. Zaproponuj algorytm szukający skarbu.



**B9.** Narysuj wszystkie parami nieizomorficzne grafy o 6 wierzchołkach i 6 krawędziach, które mają obchód Eulera. Proszę jednak nie rysować wszystkich grafów o 6 wierzchołkach i 6 krawędziach!

**B10.** Dla jakich  $m, n$  w pełnym grafie dwudzielnym  $K_{m,n}$  istnieje:

(a) szlak Eulera? (b) obchód Eulera? (c) ścieżka Hamiltona? (d) cykl Hamiltona?

**B11.** Ile różnych cykli Hamiltona jest w grafie pełnym dwudzielnym  $K_{n,n}$ ?

**B12.** Lisek Chytrusek dowodzi, że każdy spójny graf eulerowski jest hamiltonowski. Oceń poprawność rozumowania liska.

**ROZWIĄZANIE LISKA:** *Wiadomo, że w grafie eulerowskim istnieje spacer odwiedzający każdą krawędź raz i wracający do wierzchołka startowego. Skoro odwiedzamy wszystkie krawędzie, to odwiedzamy też każdy wierzchołek, a przy tym wracamy do wierzchołka startowego, zatem istnieje w grafie cykl Hamiltona.*

**B13.** Czy istnieje graf, który:

- ma wszystkie stopnie parzyste, ale nie jest grafem Eulera?
- jest grafem Eulera, ma nieparzystą liczbę wierzchołków i nieparzystą liczbę krawędzi?
- jest grafem Eulera, ma parzystą liczbę wierzchołków i nieparzystą liczbę krawędzi?
- jest grafem Eulera, ma parzystą liczbę wierzchołków, a jego dopełnienie jest grafem Eulera?
- jest dwudzielny, 4-regularny i nie ma cyklu Hamiltona?
- jest 10-regularny, ma 18 wierzchołków i nie ma cyklu Hamiltona?