Zadania przygotowujące do kolokwium 23 listopada 2023

Zad. 1. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród 25 przypadkowych przechodniów nie ma osób obchodzących urodziny tego samego dnia. Zakładamy, że 29 II nie jest dniem urodzin a wszystkie pozostałe dni roku mogą być z jednakowym prawdopodobieństwem dniem urodzin każdego przypadkowego przechodnia.

Zad. 2. W kapeluszu jest 36 różnych losów, po cztery dla każdej z wartości wygranej : $1, 2, \ldots, 9$. Losujemy **kolejno, bez zwracania** 6 z nich. Oblicz prawdopodobieństwo, że :

(i) pierwsze trzy losy mają wartość 1;

(ii) wylosowaliśmy 3 losy o jednej wartości i 3 o drugiej (np. $2, 3, 3, 2, 3, 2$);

(iii) w sumie wylosowaliśmy dokładnie dwie różne wartości wygranych (np. $1, 5, 5, 5, 5, 1$);

(iv) nie wylosowaliśmy żadnego losu o wartości 1;

(v) wylosowaliśmy co najmniej jeden los o wartości 1;

(vi) każdy wylosowany los ma inną wartość.

Jak zmienią się wyniki w przypadku zmiany doświadczenia na losowanie **ze zwracaniem**?

Zad. 3. W urnie są trzy kule białe i dwie czarne.

(i) Wyciągamy jedną kulę z urny i wyrzucamy bez oglądania, a potem wyciągamy następną kulę. Jaka jest szansa, że za drugim razem wyciągniemy kulę białą?

(ii) Wyciągamy jedną kulę z urny i wrzucamy z powrotem do urny cztery kule tego samego koloru co kula wyciągnięta, a potem wyciągamy następną kulę. Jaka jest szansa, że za drugim razem wyciągniemy kulę białą?

Zad. 4. Dla trzech zdarzeń A, B, C wiemy, że $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$ i $\mathbb{P}(C) = 0$. Czy zdarzenia A, B i C są niezależne?

Zad. 5. Na odcinku o długości 10 wybrano losowo dwa punkty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że odległość między nimi jest większa niż 3 ?

Zad. 6. Ania i Basia umówiły się w restauracji między 16:00 a 17:00. Zakładamy, że każda z nich przychodzi w losowym momencie z podanego przedziału. Niech A oznacza zdarzenie, że pierwsza przyjdzie Ania i będzie czekała na Basię co najwyżej 10 minut, a B że Basia przyjdzie przed 16:45. Oblicz prawdopobieństwa zdarzeń A i B i sprawdź, czy są one niezależne.

Zad. 7. Student zna odpowiedź na pytanie egzaminacyjne z prawdopodobieństwem p. Jeżeli nie zna odpowiedzi, to zgaduje jedną z k możliwych odpowiedzi z prawdopodobieństwem $\frac{1}{k}$. Jeżeli odpowiedział prawidłowo, to jakie jest prawdopodobieństwo, że znał odpowiedź?

Zad. 8. Pięć kobiet i pięciu mężczyzn zostaje ustawionych w ranking na podstawie wyników egzaminu. Zakładamy, że każdy wynik jest inny i wszystkie uporządkowania są jednakowo prawdopodobne. Niech X będzie najwyższą pozycją w rankingu uzyskaną przez kobietę (np. $X = 1$, jeśli na pierwszym miejscu jest kobieta.) Podaj rozkład zmiennej losowej X.

Zad. 9. W losowaniu totolotka wybiera się 10 różnych liczb ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$ ($n \geqslant 10$). Niech X oznacza drugą co do wielkości (licząc od najmniejszej do największej) z wylosowanych liczb. Podaj rozkład zmiennej X.

Zad. 10. Z przedziału $[0, 1]$ wybrano losowo cztery liczby. Niech X oznacza największą z nich. Znajdź dystrybuantę, gęstość, wartość oczekiwaną i wariancję X.

Zad. 11. Zmienna losowa X posiada rozkład podany w poniższej tabeli

k	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Oblicz wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennej X.

Zad. 12. Zmienna losowa ma rozkład

$$\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{2^i}, \text{ dla } i = 1, 2, 3 \quad \text{i} \quad \mathbb{P}(X = 8) = \frac{1}{8}.$$

Wyznacz rozkład zmiennych losowych $Y = (-2)^X$ oraz $Z = 4X + 1$. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennych losowych $Y = (-2)^X$ oraz $Z = 4X + 1$ na dwa sposoby: korzystając z rozkładu i korzystając z „prawa leniwego statystyka".

Zad. 13. Zmienna losowa X ma rozkład

$$\mathbb{P}(X = i) = \frac{7}{8^i}, \text{ dla } i = 1, 2, 3 \ldots$$

Wyznacz $\mathbb{E}Y$ i Var$Y$ dla $Y = 2^X$.

Zad. 14. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $Y = \cos(\pi X)$, jeżeli zmienna losowa X ma rozkład:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Następnie oblicz $\mathbb{E}Y$ i Var$Y$

Zad. 15. Czas pracy pewnego urządzenia (w miesiącach) jest zmienną losową X o gęstości równej $f(x) = Cx^{-4}$ dla $x > 2$ oraz $f(x) = 0$ dla $x \leqslant 2$.

a) Wyznacz C.

b) Wyznacz dystrybuantę tej zmiennej losowej.

c) Oblicz prawdopodobieństwo, że maszyna będzie działać przez co najmniej 5 miesięcy.

Zad. 16. Oznaczmy czas świecenia żarówki pewnej ustalonej marki jako zmienną losową T. Stwierdzono, że

$$\mathbb{P}(T > t) = e^{-t/1000} \quad \text{dla każdego } t > 0.$$

Wyznacz przeciętny czas świecenia żarówki.

Zad. 17. Dla zmiennej losowej X o rozkładzie jednostajnym o gęstości:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{dla } a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{dla } x > b. \end{cases}$$

Znajdź funkcję charakterystyczną $\phi_X(t)$ zmiennej losowej X i znajdź rozkład zmiennej losowej $Y = e^X$

Zad. 18. Zmienna losowa X posiada gęstość daną wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ C\sqrt{x} & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$$

(i) Oblicz stałą C.

(ii) Oblicz $\mathbb{P}(-1 < X < 2)$.

(iii) Wyznacz dystrybuantę F_X zmiennej losowej. X.

Zad. 19. Zmienna losowa X posiada dystrybuantę daną wzorem:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < -1 \\ \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2} & \text{dla } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

(i) Wyznacz gęstość zmiennej losowej X.

(ii) Oblicz wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennej X.

(iii) Znajdź $\mathbb{E}Y$ dla $Y = X^4$.