Rachunek Prawdopodobieństwa.
Granice zmiennych losowych. Funkcja charakterystyczna.

Definicja. *Ciąg zmiennych losowych* $X_1, X_2, \ldots$ *dąży do zmiennej losowej* X **według rozkładu** *(lub* **słabo***), co zapisujemy*

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$$

gdy ciąg dystrybuant F_n *zmiennych losowych* X_n *dąży do dystrybuanty* F *zmiennej losowej* X *w każdym punkcie ciągłości* F*.*

Definicja. *Ciąg zmiennych losowych* $X_1, X_2, \ldots$ *dąży do zmiennej losowej* X **według prawdopodobieństwa** *(lub* **według miary** *albo* X_n *jest* **zbieżny stochastycznie** *do* X*), co zapisujemy*

$$X_n \xrightarrow{P} X,$$

gdy dla każdego $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = 0.$$

Definicja. *Ciąg zmiennych losowych* $X_1, X_2, \ldots$ *dąży do zmiennej losowej* X **z prawdopodobieństwem jeden** *(lub* **prawie na pewno***), co zapisujemy*

$$X_n \xrightarrow{p.n.} X,$$

gdy

$$\mathbb{P}\left(\{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\}\right) = 1.$$

Definicja. *Ciąg zmiennych losowych* $X_1, X_2, \ldots$ *dąży do zmiennej losowej* X **względem momentów rzędu** r*, co zapisujemy*

$$X_n \xrightarrow{r} X,$$

gdy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n - X|^r \to 0.$$

Twierdzenie 1.

(i) *Jeśli* $X_n \xrightarrow{P} X$*, to* $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$*. Jeśli ponadto* X *jest funkcją stałą, tzn.* $\mathbb{P}(X = c) = 1$*, to zbieżność* $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c$ *pociąga zbieżność* $X_n \xrightarrow{P} c$*.*

(ii) *Jeśli* $X_n \xrightarrow{p.n.} X$*, to* $X_n \xrightarrow{P} X$*.*

(iii) *Jeśli* $X_n \xrightarrow{P} X$*, to istnieje podciąg* X_{n_i} *taki, że* $X_{n_i} \xrightarrow[i\to\infty]{p.n.} X$*.*

(iv) *Jeśli* $r \geqslant s \geqslant 1$ *i* $X_n \xrightarrow{r} X$*, to* $X_n \xrightarrow{s} X$*.*

(iv) *Jeśli* $X_n \xrightarrow{s} X$ *dla pewnego* $s \geqslant 1$*, to* $X_n \xrightarrow{P} X$*.*

Twierdzenie 2 (Słabe prawo wielkich liczb)**.** *Niech* $X_1, X_2, \ldots$ *będzie ciągiem i.i.d. zmiennych losowych takim, że* $\mathbb{E}X_i = \mu$ *i* $\mathbb{E}X_i = \sigma^2$*. Ponadto, niech*

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n\,.$$

Wtedy, dla każdego $\epsilon > 0$*,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right) = 0,$$

czyli

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu.$$

Dowód: Teza wynika natychmiast z nierówności Czebyszewa. □

Twierdzenie 3 (Centralne twierdzenie graniczne)**.** *Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem i.i.d. zmiennych losowych takim, że $\mathbb{E}X_i = \mu$ i $\mathbb{E}X_i = \sigma^2 > 0$. Ponadto, niech*

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n\,.$$

Wtedy, dla każdego rzeczywistej stałej a,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} < a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-t^2/2}dt,$$

czyli

$$\frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1),$$

gdzie $\mathcal{N}(0,1)$ jest zmienną losową o standardowym rozkładzie normalnym.

Dowód powyższego twierdzenia wykorzystuje funkcje charakterystyczne.

Definicja. Funkcją charakterystyczną *zmiennej losowej X nazywamy funkcję $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zdefiniowaną wzorem*

$$\phi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})\,.$$

Twierdzenie 4 (Własności funkcji charakterystycznej)**.** *Niech $\phi_X(t)$ będzie funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X.*

(i) *$\phi_X(0) = 1$ i $|\phi_X(t)| \leqslant 1$ dla $t \in \mathbb{R}$.*

(ii) *$\phi_X(t)$ jest ciągła w każdym punkcie.*

(iii) *Jeśli dla pewnego naturalnego k mamy $\mathbb{E}|X|^k < \infty$, to*

$$\phi_X(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\mathbb{E}(X^j)}{j!}(it)^j + o(t^k)\,,$$

stąd $\phi^{(k)}(0) = i^k\mathbb{E}(X^k)$.

(iv) *Jeśli zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne, to*

$$\phi_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) = \phi_{X_1}(t)\phi_{X_2}(t)\cdots\phi_{X_n}(t)\,.$$

Twierdzenie 5 (Twierdzenie o ciągłości)**.** *Niech $X_1, X_2, \ldots,$ będzie ciągiem zmiennych losowych o funkcjach charakterystycznych $\phi_1, \phi_2, \ldots$.*

(i) *Jeśli $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, to ciąg $\phi_n(t)$ jest zbieżny w każdym punkcie do funkcji charakterystycznej $\phi_X(t)$ zmiennej losowej X.*

(ii) *Jeśli dla każdego $t \in \mathbb{R}$ istnieje granica*

$$\phi(t) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(t)$$

i funkcja $\phi(t)$ jest ciągła w zerze, to $\phi(t)$ jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej X i $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

W szczególności, dystrybuanta zmiennej losowej X jest jednoznacznie wyznaczona przez jej funkcję charakterystyczną $\phi(t)$.

Uwaga. Zamiast funkcji charakterystycznej czasami możemy stosować **funkcję tworzącą momenty** zdefiniowaną wzorem

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})\,.$$

Ma ona tę zaletę, że jej przeciwdziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, niemniej ma ona również istotną wadę, która, w wielu przypadkach, czyni ją bezużyteczną – dla niektórych zmiennych losowych $M_X(t)$ nie istnieje dla żadnego $t \neq 0$!