Rachunek Prawdopodobieństwa.
Przestrzenie probabilistyczne.

Definicja. **Przestrzenią probabilistyczną** *nazywamy trójkę* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, gdzie* Ω *jest* **przestrzenią zdarzeń elementarnych**, $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ *jest* σ**-algebrą** *(lub* σ**-ciałem***)* **zdarzeń***, a* $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ *jest* **miarą probabilistyczną** *spełniającą warunki:*

(A) $\mathbb{P}(\Omega) = 1.$

(B) *Jeśli* $A_1, A_2, \ldots,$ *są parami rozłączne, to*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mathbb{P}\left(A_i\right).$$

Przykład 1 (Klasyczna definicja prawdopodobieństwa)**.** *Jeśli* Ω *jest zbiorem skończonym, to* $(\Omega, 2^{\Omega}, \mathbb{P})$*, gdzie*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

jest przestrzenią probabilistyczną.

Przykład 2 (Geometryczna definicja prawdopodobieństwa)**.** *Jeśli* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *o skończonej mierze,* $\mathcal{F}$ *jest przestrzenią zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a,* $\lambda(\cdot)$ *jest miarą Lebesgue'a, a*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)},$$

to a $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *jest przestrzenią probabilistyczną.*

Twierdzenie 1 (Własności miary probabilistycznej)**.**

(i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0.$

(ii) $\mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A).$

(iii) *Jeśli* $A \subseteq B$*, to* $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B).$

(iv) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$

(v) *wzór Poincaré:*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i_1 < i_2} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \ldots + (-1)^{n+1} \sum_{i_1 < i_2 \ldots < i_n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots A_{i_n}).$$

(vi) *nierówność Boole'a:* $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_i\right)$ *i* $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i\right).$

Definicja. *Mówimy, że zdarzenia* $\{A_j : j \in J\}$ *są* **niezależne***, gdy dla dowolnego skończonego podzbioru* I *zbioru indeksów* J *zachodzi*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}\left(A_i\right). \qquad (*)$$

Jeśli równość $(*)$ *jest spełniona tylko dla dwuelementowych podzbiorów* I*, wtedy mówimy, że rodzina zdarzeń* $\{A_j : j \in J\}$ *jest* **parami niezależna**.

Definicja. *Niech* $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$ *i* $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$ *będą dwoma przestrzeniami probabilistycznymi.* **Iloczynem (produktem)** *tych przestrzeni nazywamy przestrzeń* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, gdzie* $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$*,* $\mathcal{F}$ *zawiera wszystkie zbiory typu* $A_1 \times A_2$*, gdzie* $A_1 \in \mathcal{F}_1$ *i* $A_2 \in \mathcal{F}_2$*, oraz dla takiej pary zbiorów mamy*

$$\mathbb{P}(A_1 \times A_2) = \mathbb{P}_1(A_1) \cdot \mathbb{P}_2(A_2).$$

W podobny sposób definiujemy iloczyn większej (skończonej lub przeliczalnej) rodziny przestrzeni probabilistycznych.

Definicja. *Jeśli* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *jest przestrzenią probabilistyczną, a* $B \in \mathcal{F}$ *jest zdarzeniem,* **dla którego** $\mathbb{P}(B) > 0$, *wtedy możemy skonstruowac* **przestrzeń warunkową** $(B, \mathcal{F}_B, \mathbb{P}_B)$ *przyjmując*

$$\mathcal{F}_B = \{F \cap B : F \in \mathcal{F}\},$$

a dla każdego $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Prawdopodobieństwo $\mathbb{P}_B(A)$ *zwykle zapisujemy jako* $\mathbb{P}(A|B)$ *i czytamy jako* **prawdopodobieństwo (warunkowe) zdarzenia** A **pod warunkiem (zajścia) zdarzenia** B*.*

Uwaga. Jeśli zdarzenia A i B są niezależne, to

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \quad \text{i} \quad \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)\,,$$

zakładając, że $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$, bo inaczej prawdopodobieństwa warunkowe nie są dobrze zdefiniowane.

Twierdzenie 2 (Wzór łańcuchowy)**.** *Jeżeli zdarzenia* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *spełniają warunek* $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$, *to*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})\,.$$

Twierdzenie 3. *Jeśli* $B_1, B_2, \ldots, B_k \in \mathcal{F}$ *są podziałem* Ω *na rozłączne zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie, to dla każdego zdarzenia* $A \in \mathcal{F}$ *mamy*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)\,,$$

a dla każdego $j = 1, 2, \ldots, k$,

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\,\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)}\,.$$

Pierwsze z powyższych równań nazywamy wzorem na prawdopodobieństwo całkowite, a drugie wzorem Bayesa.