Kombinatoryczna teoria liczb

Semestr zimowy 2013/2014

Seria X

Zadanie 10.1. Udowodnij, że każdy skończony zbiór A zawiera zdysocjowany podzbiór mocy co najmniej $\log_3 |A|$.

Zadanie 10.2. Pokaż, że każda *niewłaściwa kostka addytywna* zawiera nietrywialny ciąg arytmetyczny dlugości 3.

Zadanie 10.3.* Pokaż, że jeżeli $|A+A| = K|A|$, to istnieje zbior Λ taki, że $|\Lambda| \ll K \log |A|$ oraz $A \subseteq Span(\Lambda)$.

Zadanie 10.4. Oszacuj moc największego zbioru *zdysocjowanego* zawartego w $[N]$.

Zadanie 10.5. Udowodnij, że jeżeli $A \subseteq [N]$, $|A| > 3N/4$, to istnieje zbiór $S \subseteq \mathbb{Z}$ mocy $\Omega(\log \log n)$ taki, że $S + S \subseteq A$.

Zadanie 10.6.* Zbiór postaci $K = K(d, a_1, \ldots, a_k) = \{d + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i : \varepsilon_i \in \{0, 1\}\}$, nazywamy *$k$-kostką addytywną*. Zbiór K nazywamy *właściwą k-kostką addytywną*, jeśli $|K| = 2^k$. Udowodnij, że:

a) każdy zbiór $A \subseteq [N]$ mocy co najmniej $2^k N^{1-1/2^k}$ zawiera *właściwą k-kostkę addytywną,*

b) istnieje podzbiór $[N]$ mocy $O(N^{1-k/2^k})$ nie zawierający *właściwej k-kostki addytywnej,*

Wskazówka: w podpunkcie b rozpatrz zbiór losowy.

Zadanie 10.7. Pokaż, że istnieje podzbiór $[N]$ mocy $\Omega(N^{1-k/2^k+o(1)})$ nie zawierający *k-kostki addytywnej.*

Wskazówka: wykorzystaj konstrukcję Behrenda i zadanie...

Zadanie 10.8. Niech $A \subseteq \mathbb{Z}_N$ oraz $1 \leq l < N/3$. Pokaż, że jeżeli dla pewnego $b \in \mathbb{Z}_N$, $|(A - A) \setminus [b, b+l]| < |A|/2$, to istnieje $a \in \mathbb{Z}_N$ taki, że $A \subseteq [a, a+l]$.