RAP 412 29.10.2008

Wykład 4: Funkcje tworzące. Procesy gałązkowe

Wykładowca: Andrzej Ruciński *Pisarze:Tomasz Ciaś, Paweł Skórzewski*

Wprowadzenie

Kontynuując nasz spacer, spróbujemy w sposób matematyczny spojrzeć na zjawisko *déjà vu*, wstąpimy do kasyna, by oddać się po raz kolejny dobrze nam znanej, lecz wciąż niezmiernie fascynującej grze w orła i reszkę, a kiedy w końcu wreszcie wyjdziemy na zero, przyjrzymy się bliżej niezwykłej populacji monet.

1 Funkcje tworzące (dokończenie)

1.1 Moment pierwszych odwiedzin

Bywa tak, że wstępując do lokalu, odnosimy wrażenie, że miejsce to jest nam dziwnie znajome — znajome stoliki, znajome wnętrze, znajomy barman. . . — zupełnie tak, jakbyśmy kiedyś już tu byli. Zaczynamy się wtedy zastanawiać: kiedy to było? Jeśli nie jest to tylko złudzenie (tzw. *déjà vu*), to w znalezieniu odpowiedzi na to pytanie może nam pomóc aparat funkcji tworzących.

Niech

$$f_r(n) := P(S_1 \neq r, \ldots, S_{n-1} \neq r, S_n = r)$$

oznacza prawdopodobieństwo, że punkt r osiągniemy po raz pierwszy w n-tym kroku. Funkcję tworzącą tego ciągu oznaczmy przez

$$F_r(s) := \sum_{n=1}^{\infty} f_r(n) s^n.$$

Zwróćmy uwagę, że może zachodzić $F_r(1) < 1$, ponieważ może się zdarzyć, że nigdy nie osiągniemy punktu r (istnieją spacery, które nie docierają do r).

Twierdzenie 1. *Zachodzą następujące równości:*

(a) $F_r(s) = (F_1(s))^r$ *dla* $r \geq 1$.

(b) $F_1(s) = \frac{1-\sqrt{1-4pqs^2}}{2qs}$.

Intuicyjnie, część (a) tego twierdzenia należy rozumieć w ten sposób, że aby dojść do punktu r, musimy wpierw pokonać dystans jednego kroku w prawo, potem kolejny taki sam dystans i tak dalej („krok po kroku” albo inaczej „ziarnko do ziarnka aż zbierze się miarka”).

Dowód. (a) Znajdźmy prawdopodobieństwo, że w n-tym kroku po raz pierwszy pojawimy się w punkcie r. Dla $r = 1$ teza jest oczywista. W dalszej części dowodu będziemy zakładać, że $r > 1$. Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite, otrzymujemy:

$$f_r(n) = \sum_{k=1}^{n-1} f_1(k) f_{r-1}(n-k)$$

(aby dojść z zera do r, musimy najpierw dojść do punktu 1 w k krokach, a następnie w $n-k$ krokach z punktu 1 do punktu r). Po pomnożeniu obustronnie przez s^n i zsumowaniu po n dostajemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_r(n) s^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} f_1(k) f_{r-1}(n-k) s^n,$$

co z kolei ze wzoru na mnożenie szeregów możemy dalej przekształcić na

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_r(n) s^n = \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_{r-1}(i) s^i \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_1(j) s^j \right),$$

czyli

$$F_r(s) = F_{r-1}(s) F_1(s).$$

Postępując analogicznie dla $F_{r-1}(s)$, $F_{r-2}(s)\ldots$, otrzymujemy tezę.

(b) Niech zmienna losowa $T_r := \min\{n \colon S_n = r\}$ oznacza moment pierwszej wizyty w punkcie r. Prawdopodobieństwo, że do 1 dojdziemy w pierwszym kroku, jest oczywiście równe $P(T_1 = 1) = f_1(1) = p$. Niech teraz $n > 1$. Ze wzoru na prawdopodobieństwo calkowite

$$P(T_1 = n) = \underbrace{P(T_1 = n | X_1 = 1)}_{=0} p + P(T_1 = n | X_1 = -1) q.$$

Prawdopodobieństwo $P(T_1 = n | X_1 = 1)$ jest zerowe, gdyż jeśli zrobiliśmy pierwszy krok w prawo, to znaczy, że przybyliśmy do punktu 1 „za wcześnie”. Z kolei z jednorodności czasowej i przestrzennej widać, że

$$P(T_1 = n | X_1 = -1) = P(T_1 = n-1 | S_0 = -1) = P(T_2 = n-1),$$

a stąd

$$P(T_1 = n) = P(T_2 = n-1) q,$$

$$f_1(n) = f_2(n-1) q.$$

Po obustronnym pomnożeniu przez s^n i zsumowaniu po n dostajemy

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_1(n) s^n = q \sum_{n=2}^{\infty} f_2(n-1) s^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_1(n) s^n - f_1(1) s = sq \sum_{n=2}^{\infty} f_2(n-1) s^{n-1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_1(n)s^n - ps = sq\sum_{n=1}^{\infty} f_2(n)s^n,$$

$$F_1(s) - ps = sqF_2(s),$$

$$F_1(s) - ps = qs\left(F_1(s)\right)^2,$$

$$qs\left(F_1(s)\right)^2 - F_1(s) + ps = 0.$$

Powyższe równanie kwadratowe ma pierwiastki

$$F_1(s)_1 = \frac{1-\sqrt{1-4pqs^2}}{2qs}, \qquad F_1(s)_2 = \frac{1+\sqrt{1-4pqs^2}}{2qs}.$$

Ponieważ wiemy, że $F_1(0) = 0$, a z drugiej strony

$$F_1(0)_2 = \lim_{s\to 0} \frac{1+\sqrt{1-4pqs^2}}{2qs} = \infty,$$

zatem należy odrzucić rozwiązanie $F_1(0)_2$. Zostaje

$$F_1(s) = \frac{1-\sqrt{1-4pqs^2}}{2qs}.$$

□

Wniosek 1. *Prawdopodobieństwo, że spacer kiedykolwiek wejdzie na dodatnią (prawą) połowę osi, wynosi*

$$F_1(1) = \frac{1-|p-q|}{2q} = \min\left\{1, \frac{p}{q}\right\}.$$

Przypomnijmy, że na jednym z poprzednich wykładów otrzymaliśmy wynik

$$f_1(n) = \frac{1}{n}P(S_n = 1).$$

Podstawiając ten wynik do definicji funkcji tworzącej F_r, otrzymujemy

$$F_1(1) = \sum_{n=1}^{\infty} f_1(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}P(S_n = 1).$$

Podejrzliwy umysł zastanawia się, czy otrzymane wyniki są sobie równe...

Czytelnikowi zostawiamy dowód tego faktu oraz wskazówkę, że dla $p = q$ i $n = 2m-1$:

$$F_1(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\binom{n}{\frac{n+1}{2}}\frac{1}{2^n} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-2)!}{m!(m-1)!}\frac{2}{2^{2m}}.$$

Wystarczy pokazać, że powyższa suma równa jest wyrażeniu

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1}\binom{\frac{1}{2}}{m} = 1 - \sqrt{1-1} = 1.$$

1.2 Czas przebywania na dodatniej półosi

Wstąpmy jeszcze na chwilę do kasyna. Tutaj krupier proponuje nam ciekawą grę. Rzucamy $2n$ razy pod rząd monetą. Ilekroć wyrzucimy orła, dostajemy dolara, zaś kiedy wyrzucimy reszkę, musimy jednego dolara oddać. Po skończonej grze wyszliśmy na zero — wyrzuciliśmy tyle samo orłów, ile reszek. Mina nam trochę zrzedła — liczyliśmy, że zyskamy choć dolara. Myśl ucieka nam do tych chwil radosnych, kiedy skończona przed chwilą gra jeszcze trwała, a my cieszyliśmy się przewagą naszych dzielnych orłów nad hordami podłych reszek... Jak długo trwały te szczęśliwe chwile? Jaki czas utrzymywaliśmy się „nad kreską"?

Doświadczenie to można traktować jako prosty spacer losowy o długości $2n$, który rozpoczął i zakończył się w zerze. Będziemy rozważać warunkową przestrzeń probabilistyczną — pod warunkiem, że $S_{2n} = 0$. Niech zmienna losowa L_{2n} oznacza liczbę kroków pobytu na dodatniej półosi w czasie $\{1, 2, \dots, 2n\}$. Za krok będziemy tym razem uważali przejście z jednego punktu do drugiego, przy czym żeby uznać krok za dodatni, wystarczy, że dodatni będzie jego punkt początkowy bądź końcowy. Innymi słowy, dodatnimi krokami są te odcinki wykresu, które znajdują się nad osią odciętych.

Zauważmy, że rozkład prawdopodobieństwa na tej przestrzeni warunkowej nie zależy od wartości p. Zauważmy również, że zmienna losowa L_{2n} może przyjmować tylko parzyste wartości (z zakresu $\{0, 2, \dots, 2n\}$). Możnaby przypuszczać, że rozkład tej zmiennej losowej skupia się w połowie zakresu, tj. w okolicach k. Okazuje się jednak, że zachodzi następujące, sprzeczne z intuicją twierdzenie:

Twierdzenie 2. *Dla każdego $k = 0, 1, \dots, n$:*

$$P(L_{2n} = 2k | S_{2n} = 0) = \frac{1}{n+1}.$$

Dowód. Ponieważ wartość p nie jest istotna, możemy przyjąć $p = \frac{1}{2}$.

Niech $|s|, |t| < 1$. Bierzemy dwie funkcje tworzące:

$$G_{2n}(s) = E(s^{L_{2n}} | S_{2n} = 0) = \sum_{k=0}^{n} s^{2k} P(L_{2n} = 2k | S_{2n} = 0),$$

$$F_0(s) = E(s^{T_0}),$$

gdzie T_0 oznacza czas pierwszego powrotu do zera.

Teraz (znienacka!) bierzemy następującą funkcję

$$H(s,t) := \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} P(S_{2n} = 0) G_{2n}(s).$$

Naszym celem będzie pokazanie, że

$$G_{2n}(s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{s^{2k}}{n+1}.$$

Wówczas stanie się jasne, że

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{s^{2k}}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} s^{2k} P(L_{2n} = 2k | S_{2n} = 0),$$

a stąd (z porónania współczynników) wynika teza.

W tym celu postawimy sobie cel pomocniczy, tzw. podcel, którym będzie wykazanie, iż

$$H(s,t)-1=\frac{1}{2}H(s,t)\left(F_0(t)+F_0(st)\right).$$

Z własności funkcji tworzącej i wartości oczekiwanej (analog wzoru na prawdopodobieństwo całkowite) otrzymujemy:

$$G_{2n}(s)=\sum_{r=1}^{n}E(s^{L_{2n}}|S_{2n}=0,T_0=2r)P(T_0=2r|S_{2n}=0).$$

Mamy z jednorodności czasowej:

$$E(s^{L_{2n}}|S_{2n}=0,T_0=2r)=E(s^{L_{2n-2r}}|S_{2n-2r}=0)\cdot E(s^{L_{2r}}|T_0=2r)=$$

$$=\underbrace{G_{2n-2r}(s)}_{\text{z definicji}}\cdot\sum_{k=0}^{r}s^{2k}\underbrace{P(L_{2r}=2k|T_0=2r)}_{\text{jest niezerowe tylko dla }k=0,r}=G_{2n-2r}(s)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s^{2r}\right).$$

Z kolei z jednorodności czasowej i wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe:

$$P(T_0=2r|S_{2n}=0)=\frac{P(T_0=2r)P(S_{2n-2r}=0)}{P(S_{2n}=0)}.$$

Po podstawieniu otrzymujemy:

$$G_{2n}(s)=\sum_{r=1}^{n}G_{2n-2r}(s)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s^{2r}\right)\frac{P(T_0=2r)P(S_{2n-2r}=0)}{P(S_{2n}=0)},$$

$$P(S_{2n}=0)G_{2n}(s)=\sum_{r=1}^{n}\left(G_{2n-2r}(s)P(S_{2n-2r}=0)\right)\left(\frac{1}{2}(1+s^{2r})P(T_0=2r)\right).$$

Po obustronnym pomnożeniu przez t^{2n} i zsumowaniu po n dostajemy:

$$\sum_{n=1}^{\infty}t^{2n}P(S_{2n}=0)G_{2n}(s)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{n}G_{2n-2r}(s)P(S_{2n-2r}=0)t^{2n}(1+s^{2r})P(T_0=2r),$$

$$H(s,t)-1=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{n=r}^{\infty}G_{2n-2r}(s)P(S_{2n-2r}=0)t^{2n-2r}\left(t^{2r}+(st)^{2r}\right)P(T_0=2r),$$

$$H(s,t)-1=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}G_{2m}(s)P(S_{2m}=0)t^{2m}}_{=H(s,t)}\left(t^{2r}+(st)^{2r}\right)P(T_0=2r),$$

$$H(s,t)-1=\frac{1}{2}H(s,t)\left(\sum_{r=1}^{\infty}t^{2r}P(T_0=2r)+\sum_{r=1}^{\infty}(st)^{2r}P(T_0=2r)\right),$$

$$H(s,t) - 1 = \frac{1}{2} H(s,t) \left(F_0(t) + F_0(st) \right),$$

co było naszym podcelem.

Wyznaczamy:

$$H(s,t) = \frac{2}{2 - F_0(t) - F_0(st)} = \frac{2}{\sqrt{1-t^2} + \sqrt{1-s^2t^2}} =$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{1-s^2t^2} - \sqrt{1-t^2}\right)}{t^2(1-s^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} P(S_{2n} = 0) \frac{1-s^{2n+2}}{(n+1)(1-s^2)}.$$

Wynika stąd:

$$G_{2n}(s) = \frac{1}{n+1} \frac{1-s^{2n+2}}{1-s^2} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s^{2k},$$

co było naszym celem. □

2 Procesy gałązkowe

Siedząc w kasynie (lub w jakiejś knajpie, do której zaniósł nas stamtąd jakiś spacer losowy) i dumając nad ostatnią monetą, która nam została w kieszeni, chcielibyśmy nieraz, żeby nam się ta moneta rozmnożyła. Wiemy, że w rzeczywistości prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest równe zero, lecz gdyby tak puścić wodze wyobraźni... i przyjąć, że z jednej monety powstaje kilka... w każdym kolejnym pokoleniu... i zmienne losowe opisujące liczbę „dzieci" każdej monety są niezależne i o jednakowym rozkładzie... to jakie byłoby prawdopodobieństwo, że w końcu uzbieralibyśmy na ten wymarzony samochód!?

Powyższy proces jest przykładem procesu gałązkowego, zwanym też procesem Galtona[1]-Watsona[2]. Procesy gałązkowe modelują rozwój populacji (jednopłciowej, rozmnażającej się przez podzial, np. bakterii, ameb, monet czy innych mikroorganizmów). Zmienne losowe Z_n (przyjmujące nieujemne wartości) liczą ilość osobników w n-tym pokoleniu. Przyjmujemy zawsze, że jest jeden „protoplasta rodu", czyli $Z_0 = 1$. Jak już wspomnieliśmy, zmienne losowe opisujące, ile dzieci ma każdy osobnik, są niezależne o jednakowym rozkładzie. Główne pytanie, jakie się pojawia, to: jakie są szanse, że dana populacja przeżyje?

Wprowadźmy następujące oznaczenie:

$$G_n(s) := G_{Z_n}(s) = E(s^{Z_n}).$$

Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.

$$G_{m+n}(s) = G_n\left(G_m(s)\right) = G_m\left(G_n(s)\right) = G(G(\ldots G(s)\ldots)).$$

[1]Francis Galton (1822-1911) — przyrodnik, antropolog i podróżnik angielski.
[2]Henry William Watson (1827-1903) — matematyk angielski.

Dowód.

$$Z_{m+n} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{Z_m},$$

gdzie X_i oznacza liczbę potomków i-tego osobnika z m-tego pokolenia po n pokoleniach (czyli w $(m+n)$-tym pokoleniu).

Na podstawie twierdzenia z poprzedniego wykładu:

$$G_{m+n}(s) = G_m(G_{X_1}(s)).$$

Ponadto (jednorodność):

$$G_{X_1}(s) = G_n(s).$$

Mamy:

$$G_n(s) = G_1(G_{n-1}(s)) = \ldots = G_1(G_1(\ldots G_1(s)\ldots)),$$

a stąd już dostajemy tezę. □