KOMBINATORYKA
Zasada szufladkowa i jej uogólnienia

16 stycznia 2020

Zasada szufladkowa, zwana też zasadą Dirichleta, a w jez. ang. ,,Pigeonhole Principle", może być sformułowana następująco. Jeśli $n+1$ gołębi przyfrunie do n gołębników, to w pewnym gołębniku będą przynajmniej dwa gołębie. Bardziej formalnie ...

Twierdzenie 1 (Zasada szufladkowa) *Jeżeli*

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_t$$

oraz $|X| \geq t+1$, *to dla pewnego* $i \in \{1, \ldots, t\}$ *zachodzi* $|X_i| \geq 2$.

Przykłady:

- Mając dowolne dwa pudełka (prostopadłościany) zawsze można postawić jedno na drugim tak, by górne pudełko nie wystawało poza obręb dolnego.
- Na płaszczyźnie danych jest pięć punktów o współrzędnych całkowitych. Uzasadnić, że środek jednego z odcinków łączących te punkty jest również punktem o współrzędnych całkowitych.
- W każdym grafie istnieją 2 wierzchołki o tym samym stopniu.

Jest zadziwiające, że dzięki tak prostemu aparatowi matematycznemu można wykazać prawdziwość niebanalnych faktów. Jako pierwsze zastosowanie tej metody przedstawimy dowód twierdzenia Erdősa-Szekeresa dotyczącego monotonicznych podciągów liczb rzeczywistych. Mówimy, że ciąg liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest *rosnący*, jeżeli $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, a *malejący*, jeżeli $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$.

Twierdzenie 2 (Erdős, Szekeres, 1935) *Niech a, b będą liczbami naturalnymi, $n = ab + 1$ i niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będzie dowolnym ciągiem n liczb rzeczywistych. Wówczas ciąg ten zawiera rosnący (malejący) podciąg złożony z $a+1$ elementów lub malejący (rosnący) podciąg złożony z $b+1$ elementów.*

Dowód: Każdemu elementowi x_i zadanego ciągu n liczb rzeczywistych przyporządkujmy uporządkowaną parę (l_i^-, l_i^+), gdzie l_i^- jest długością najdłuższego malejącego podciągu o początku w x_i, a l_i^+ jest długością najdłuższego rosnącego podciągu o początku w x_i.

Załóżmy nie wprost, że każdy podciąg malejący ma długość $\leq a$ i każdy podciąg rosnący ma długość $\leq b$. Zdefiniujmy funkcję

$$f : \{1, 2, \ldots, ab + 1\} \to \{1, 2, \ldots, a\} \times \{1, 2, \ldots, b\}$$

w taki sposób, że

$$f(i) = (l_i^-, l_i^+), \quad i = 1, 2, \ldots, ab + 1$$

Funkcja f działa ze zbioru mocy n w zbiór mocy co najwyżej $ab = n - 1$. Zatem na podstawie zasady szufladkowej istnieją $i < j$ takie, że $f(i) = f(j)$. Jest to jednak niemożliwe. Jeżeli $x_i \leq x_j$, to mamy $l_i^+ > l_j^+$, a w przypadku, gdy $x_i \geq x_j$, to $l_i^- > l_j^-$. ■

Twierdzenie Erdősa-Szekeresa jest ,,najlepsze z możliwych" w tym sensie, że przestaje być prawdziwe, gdy wartość n zmniejszymy z $ab + 1$ do ab. Zauważmy bowiem, że następujący ciąg złożony z ab liczb całkowitych nie zawiera ani rosnącego podciągu złożonego z $a + 1$ wyrazów ani malejącego podciągu złożonego z $b + 1$ wyrazów:

$$ba + 1,\ ba + 2, \ldots, ba + a$$

$$(b - 1)a + 1,\ (b - 1)a + 2, \ldots, (b - 1)a + a,$$

$$\ldots$$

$$\ldots 2a + 1,\ 2a + 2, \ldots, 2a + a$$

$$a + 1,\ a + 2, \ldots, a + a$$

Uwaga 1 Czasem zasada szufladkowa jest przedstawiana w formie swojej transpozycji jako zasada iniekcji.

Twierdzenie 3 (Zasada iniekcji) *Jeśli $f : D \to R$ jest różnowartościowa, to $|D| \leq |R|$.* ■

Zauważmy, że transpozycja powyższej zasady brzmi: jeśli $|D| > |R|$, to dla każdej funkcji $f : D \to R$ istnieją $x, y \in D$ takie, że $f(x) = f(y)$. Interpretując R jako zbiór t szufladek, D jako zbiór rozmieszczanych elementów, a f jako rozmieszczenie (przeciwobrazy f wyznaczają podział D), otrzymujemy zasadę szufladkową. W powyższym dowodzie zasada iniekcji wydaje się nawet bardziej na miejscu, ale, oczywiście oba podejścia są równoważne.

Naturalnym uogólnieniem zasady szufladkowej jest tak zwana zasada podziałowa, która stwierdza, że jeżeli zbiór o dostatecznie dużej liczbie elementów podzielimy na pewną liczbę części, to któraś z nich będzie zawierała odpowiednio dużo elementów.

Twierdzenie 4 (Zasada podziałowa) *Niech $m_1, \ldots, m_t$ będzie ciągiem liczb naturalnych. Jeżeli*

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_t$$

oraz

$$|X| \geq \left(\sum_{i=1}^{t} m_i\right) - t + 1$$

to dla pewnego $i \in \{1, \ldots, t\}$ zachodzi $|X_i| \geq m_i$.

Podamy teraz dwa przykłady zastosowań zasady podziałowej. Pierwszy z nich dotyczy twierdzenia Ramseya dla par, gdzie celem jest monochromatyczny trójkąt.

Twierdzenie 5 (Przyjęcie na sześć osób) *Wśród dowolnych sześciu osób zawsze są trzy, które znają się nawzajem LUB trzy, które nie znają się nawzajem.*

Dowód: Ustalmy jedną osobę, powiedzmy A. Na podstawie zasady podziałowej ($t = 2$, $m_1 = m_2 = 3$) A zna co najmniej 3 lub nie zna co najmniej 3 osób wśród pozostałych. Powiedzmy, że zna B,C,D. Teraz już łatwo dokończyć dowód. ■

W oparciu o zasadę podziałową można podać (trochę) inny dowód Tw. Erdősa i Szekeresa.

Drugi dowód tw. Erdősa i Szekeresa: Przy założeniu, że nie ma podciągu rosnącego mocy większej niż a, rozważmy funkcję $g : [n] \to [a]$ określoną wzorem $g(i) = l_i^+$. Stosując zasadę podziałową ($t = a$ i $m_i = b + 1$, $i = 1, \ldots, a$) wnioskujemy, że pewne $b+1$ liczb $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{b+1}}$, $i_1 < \cdots < i_{b+1}$, ma tę samą wartość parametru l_i^+, powiedzmy c. Gdyby dla pewnych $j < l$ było $x_{i_j} \leq x_{i_l}$, to $l_{i_j}^+ > c$ – sprzeczność. Zatem $x_{i_1} > \cdots > x_{i_{b+1}}$ i otrzymujemy podciąg malejący mocy $b + 1$. ■

Twierdzenie 6 (Zasada średniej) *Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, ..., a_t$ istnieją takie i, j, że*

$$a_i \leq \frac{1}{t}(a_1 + ... + a_t) \leq a_j \ .$$

Na przykład, jest niemożliwe, by wszyscy zarabiali powyżej średniej lub by wszyscy spożywali mniej alkoholu niż ,,średnia krajowa na głowę mieszkańca".

W szczególności, jeżeli

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_t,$$

to

(1) dla pewnego $i \in \{1, \ldots, t\}$ zachodzi $|X_i| \geq \lceil \frac{|X|}{t} \rceil$;

(2) jeśli natomiast dodatkowo założyć, że wszystkie zbiory X_i są parami rozłączne, to dla pewnego $i \in \{1, \ldots, t\}$ zachodzi $|X_i| \leq \lfloor \frac{|X|}{t} \rfloor$.

Ta forma zasady podziałowej jest często stosowana łącznie z metodą *dwukrotnego przeliczania*, którą teraz zilustrujemy bardzo ważnym (historycznie) przykładem.

Ścieżki hamiltonowskie w turniejach. Turniej to zorientowany graf pełny. Przez ścieżkę w turnieju rozumiemy ścieżkę skierowaną. Ścieżka hamiltonowska to ścieżka przechodząca przez wszystkie wierzchołki turnieju. Każdy turniej posiada co najmniej jedną ścieżkę hamiltonowską (ćw.). Teraz pokażemy, że są turnieje, które mają ich wiele.

Twierdzenie 7 (Tw. Szele, 1943) *Dla każdego naturalnego n, istnieje turniej na n wierzchołkach posiadający co najmniej $n!2^{-n+1}$ ścieżek Hamiltona.*

Dowód: Niech $\mathcal{T}_n$ będzie zbiorem wszystkich turniejów na zbiorze wierzchołków $[n]$. Zauważmy, że $|\mathcal{T}_n| = 2^{\binom{n}{2}}$. Dla każdego $T \in \mathcal{T}_n$, niech x_T oznacza liczbę ścieżek Hamiltona zawartych w T. Naszym celem jest pokazanie, że średnia $2^{-\binom{n}{2}} \sum_T x_T$ jest równa $n!2^{-n+1}$. Jest to fakt znacznie mocniejszy od tezy twierdzenia, która wynika z niego natychmiast na podstawie zasady średniej.

Suma $\sum_T x_T$ przelicza uporządkowane pary (T, π), gdzie $T \in \mathcal{T}_n$ a π jest ścieżką Hamiltona w T. Teraz wprawimy w ruch technikę dwukrotnego przeliczania. Ścieżka Hamiltona jest jednoznacznie określona przez podanie permutacji wierzchołków. Te same pary (T, π) można więc przeliczyć sumując po wszystkich $n!$ permutacjach π liczby y_π zliczające wszystkie turnieje T zawierające daną ścieżkę π. Nietrudno zauważyć, że $y_\pi = 2^{\binom{n}{2}-n+1}$ dla każdej permutacji π. Ostatecznie,

$$\sum_T x_T = \sum_\pi y_\pi = n!2^{\binom{n}{2}-n+1},$$

co należało dowieść. ■