

Kombinatoryka

Zestaw 2: schematy wyboru

1. Na ile sposobów można wybrać trzy liczby spośród liczb $1, 2, \dots, 100$ tak, by ich suma była parzysta? Rozważyć cztery przypadki (Tak-Tak, Nie-Tak, Tak-Nie, Nie-Nie) w zależności od tego, czy dopuszczamy powtórzenia oraz czy kolejność wybranych liczb jest istotna.
2. Ile jest 6-cyfrowych liczb naturalnych, w których cyfry występują w porządku a) malejącym?
b) niemalejącym?
3. Na ile sposobów można wybrać 13 spośród nieograniczonej liczby czerwonych, niebieskich i zielonych piłek (różniących się tylko kolorem), jeśli czerwonych ma być nie więcej niż 5?
4. 15 pasażerów wsiada na parterze do windy. Każdy z nich wysiada losowo na jednym z 20 pięter. Jakie jest prawdopodobieństwo, że
 - (a) na każdym piętrze wysiądzie co najwyżej jeden pasażer?
 - (b) na pierwszym piętrze wysiądzie dokładnie 6 osób?
 - (c) na drugim piętrze wysiądzie dokładnie 6 osób, a na ostatnim 4 osoby?
 - (d) na pierwszym piętrze wysiądzie przynajmniej jeden pasażer?

Uwaga: ludzie są zawsze rozróżnialni!

5. Ile rozwiązań całkowitych ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 123$, jeśli
 - (a) $x_i \geq 0$ dla $i = 1, 2, 3, 4, 5$?
 - (b) $x_i > 0$ dla $i = 1, 2, 3, 4, 5$?
 - (c) $x_2 \geq 2, x_3 \geq 2, x_4 \geq 4, x_1, x_5 \geq 0$?
 - (d) $x_i \geq 0$ dla $i = 1, 2, 3, 4, 5$ oraz $x_1 + x_2 = 23$?
6. Student pisze testy z czterech przedmiotów. Wynik każdego testu jest liczbą całkowitą z przedziału od 0 do 100. Na ile różnych sposobów student może zdobyć łącznie 80 punktów, jeśli
 - (a) z każdego testu student otrzymał przynajmniej 5 punktów?
 - (b) za pierwsze dwa testy otrzymał łącznie 15 punktów?

Czy podobnie można rozwiązać to zadanie po zamianie 80 punktów na np. 200 punktów?

7. Rzucamy n kostek do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że
 - (a) wypadnie dokładnie k jedynek.
 - (b) wypadnie dokładnie 5 jedynek i 6 dwójek.
 - (c) wypadnie przynajmniej raz dwójka lub przynajmniej raz trójka.
 - (d) wypadnie przynajmniej raz dwójka i przynajmniej raz trójka.
8. Na ile sposobów można ustawić n ludzi w kolejce tak, aby
 - (a) pani Nowak nie stała obok swego męża?
 - (b) 4-osobowa rodzina Nowaków stała razem?
 - (c) rodzina Nowaków stała razem i 3-osobowa rodzina Kowalskich stała razem?
 - (d) rodzina Nowaków stała razem lub rodzina Kowalskich stała razem?

9. Grupę 20 aktywistów, w której jest 4 mieszkańców Poznania, dzielimy na cztery 5-osobowe delegacje, przy czym ważny jest dla nas jedynie skład delegacji, a nie uprządkowanie osób w grupach czy kolejność delegacji. Ile jest takich podziałów, w których
- (a) w każdej delegacji jest jeden poznaniak?
 - (b) w jednej z delegacji jest jeden poznaniak, a w innej trzech pozostałych?
10. Ile słów 10-literowych można utworzyć mając do dyspozycji cztery litery a , cztery b i cztery c ? A ile, gdy zamiast czterech, będziemy mieć do dyspozycji po dziesięć liter każdego rodzaju?
11. Zebrało się n szachistów, mających do dyspozycji k szachownic, $n \geq 2k$. Na ile różnych sposobów można utworzyć k par szachistów do rozegrania pierwszej rundy turnieju? Należy rozważyć cztery sytuacje (Tak-Tak, Nie-Tak, Tak-Nie, Nie-Nie), w zależności od tego, czy ważne jest dla nas, kto gra białymi a kto czarnymi, oraz przy których szachownicach zasiądą wybrane pary.