Kombinatoryka

Zestaw 11: Struktury kombinatoryczne

1. Narysuj diagram Hassego dla relacji podzielności na zbiorze $S = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Wskaż
   a) największy łańcuch,
   b) największy antyłańcuch,
   c) najmniejszy zbiór łańcuchóww pokrywających S,
   d) najmniejszy zbior antyłańcuchow pokrywających S.
2. Porządek interwałowy. X – dowolna rodzina obustronnie domkniętych przedziałów na prostej. $I \preceq J$ wgdy $I = J$ lub prawy koniec I poprzedza lewy koniec J. Uzasadnić, że jest to częściowy porządek.
3. Niech $\mathcal{P}(n)$ będzie rodziną podziałów zbioru $\{1, \ldots, n\}$ na niepuste podzbiory z relacją rozdrobnienia. Uzasadnij, że jest to porządek częściowy i narysuj diagram Hassego dla $n = 5$.
4. Niech $M(X)$ będzie posetem wszystkich kombinacji z powtórzeniami (multizbiorów) ze zbioru X. Zbiór $A \in M(X)$ jest w pełni określony przez krotności $r_i(A)$ – liczby wystąpień elementu i w A, dla wszystkich $i \in X$. Porównać poset $M(\mathbb{N})$ z posetem $(\mathbb{N}, |)$.
5. Kratą Younga nazywamy poset, którego elementami są wszystkie nierosnące nieskończone ciągi liczb naturalnych i zer $a = (a_1 \geq a_2 \geq \ldots)$ o skończonej liczbie elementów niezerowych, przy czym
   $$a \leq b \;\Leftrightarrow a_i \leq b_i \quad \forall i$$
   Zatem elementy kraty Younga reprezentują wszystkie nieuporządkowane rozbicia liczb naturalnych (element $(0, 0, \ldots)$ interpretujemy jako puste rozbicie $\emptyset$). Narysować fragment diagramu Hassego.
6. Udowodnij dualne twierdzenie Dilwortha. Wskazówka: wykorzystaj pojęcie rzędu elementu $x \in X$ zdefiniowane jako długość najdłuższego łańcucha wychodzącego z x (długośc = moc minus 1).
7. Korzystając z dualnego twierdzenia Dilwortha udowodnij lemat Dilwortha.
8. W oparciu o Lemat Dilwortha udowodnij twierdzenie Erdősa-Szekeresa.
9. Czy maksymalny łańcuch i maksymalny antyłańcuch mogą być rozłączne?
10. Podać przyklad 3 niepustych i różnych zbiorów $A_1, A_2, A_3 \subset [4]$, które nie mają systemu różnych reprezentantów.
11. Niech $A_1, \ldots, A_m \subset X$. Wywnioskuj z tw. Halla, że jeżeli dla każdego $S \subset [m]$ zachodzi warunek
    $$|\bigcup_{i \in S} A_i| \geq |S| - d,$$
    to można znaleźć różnych reprezentantów wszystkich oprócz co najwyżej d zbiorów.
12. Pokazać, że jeżeli każda z dziewcząt zna dokładnie k ($k \geq 1$) chłopców a każdy chłopiec zna dokładnie k dziewcząt, to każdej dziewczynie mozna przyporządkować innego chłopca, którego zna.
13. Udowodnić, że dla każdego $r > n/2$ istnieje iniekcja $g_r : \binom{X}{r} \to \binom{X}{r-1}$ taka, że dla każdego $A \in \binom{X}{r}$ mamy $A \supset g_r(A)$.

14. Uzasadnij, że jeśli system Spernera $\mathcal{F}$ składa się ze zbiorów mocy nie większej niż k, $1 \leq k \leq n/2$, to $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{k}$.

15. Pokaż, że największa rodzina przecinająca się $\mathcal{A} \subset 2^{[n]}$ ma rozmiar 2^{n-1}. Podaj przyklad największej takiej rodziny (dla każdego $n \geq 2$).

16. Niech $\mathcal{A} \subseteq \binom{X}{r}$ będzie rodziną przecinającą się. Pokaz, że dla każdej permutacji cyklicznej σ liczba x_σ zbiorów rodziny $\mathcal{A}$ będących segmentami permutacji σ jest nie większa niż r.

17. Uzasadnij, że tw. EKR (obie części) wynika z następującej implikacji: jeśli $\mathcal{A} \subset \binom{X}{r}$ jest przecinającaca się i $|\mathcal{A}| = \binom{n-1}{r-1}$, to $\mathcal{A} = \binom{X}{r}_x$ dla pewnego $x \in X$.