

Kombinatoryka

Zestaw 5: Rekurencje i funkcje tworzące

Do zadań 1–9 podaj odpowiedź w postaci rekurencji.

1. Na ile sposobów można wciągnąć na n -metrowy maszt flagi trzech kolorów, jeśli flagi czerwone mają szerokość dwóch metrów a pozostałe jednego metra?
2. Znajdź liczbę n -elementowych ciągów ternarnych (tzn. o elementach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$), w których liczba zer jest parzysta.
3. Wyznacz liczbę n -elementowych ciągów ternarnych, w których żadne dwie dwójki nie stoją obok siebie.
4. Przyjmijmy oznaczenie $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Ile jest uporządkowanych par zbiorów (A_1, A_2) takich, że $A_1 \cup A_2 = [n]$, jeżeli zakładamy, że
 - a) zbiory są rozłączne?
 - b) zbiory nie muszą być rozłączne?
5. Ile jest nieuporządkowanych par zbiorów $\{A_1, A_2\}$ takich, że $A_1 \cup A_2 = [n]$, jeżeli zakładamy, że
 - a) zbiory są rozłączne?
 - b) zbiory nie muszą być rozłączne?
6. W pewnej populacji królików każda para zdolna do rozrodu rodzi co miesiąc trzy pary. W chwili “zero” jest jedna nowonarodzona para. Zakładając, że króliki są zdolne do rozrodu po dwóch miesiącach od narodzin, wyznacz liczbę par królików po n miesiącach.
7. Na ile sposobów można wypełnić prostokąt o wymiarach $2 \times m$ kostkami o wymiarach 2 na 1?
8. Podwojona wieża Hanoi składa się z $2n$ krążków, po dwa krążki w każdym z n różnych rozmiarów. Zasady przenoszenia są takie jak na wykładzie: mamy trzy pręty, nie można położyć większego krążka na mniejszy. Jaka jest minimalna liczba ruchów potrzebna do przeniesienia wieży z jednego pręta na drugi?
9. Dana jest pewna liczba $k \geq 2$. Znajdź liczbę obszarów a_n , na jakie dzieli płaszczyznę n prostych, z których k jest równoległych, a pozostałe przecinają wszystkie proste. Zakładamy, że żadne trzy proste nie przechodzą przez jeden punkt. (Podaj rekurencję ze względu na n , zakładając, że k jest ustalone.)
10. Znajdź 2-parametrowe równanie rekurencyjne dla liczby $g^*(n, k)$ k -elementowych podzbiorów zbioru $[n]$ nie zawierających sąsiednich liczb, przy czym 1 i n uważamy za sąsiednie.
11. Metodą równań charakterystycznych rozwiąż rekurencje:
 - a) $a_0 = -1, a_1 = 1, a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-1}$ dla $n \geq 2$;
 - b) $a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+1} = \frac{1}{4}a_{n-1} - a_n$ dla $n \geq 2$.

12. Podaj wzór jawny na a_n , jeżeli zwykła funkcja tworząca ciąg (a_n) ma postać:

$$\begin{aligned}(1) \quad f(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} (-x/3)^{i+1} \\(2) \quad g(x) &= \frac{2x}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{5+x} \\(3) \quad f(x) &= \frac{1}{1-x-x^2} \\(4) \quad s(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} (3x)^j \sum_{k=1}^{\infty} x^k/k\end{aligned}$$

13. Podaj wzór jawny na a_n , jeżeli wykładnicza funkcja tworząca ciąg (a_n) ma postać:

$$\begin{aligned}(1) \quad f(x) &= \sum_{n=0}^{100} nx^{n+2} \\(2) \quad h(x) &= (2x - 3x^2)^2 \\(3) \quad h(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x/3)^{i+1}}{i!} \\(4) \quad f(x) &= \frac{1}{3-x} \\(5) \quad g(x) &= \frac{x}{1+x^2} \\(6) \quad g(x) &= \frac{1}{2+3x} \\(7) \quad f(x) &= x^2 e^{-2x} \\(8) \quad g(x) &= x \sum_{i=0}^{\infty} (4x)^i + x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k\end{aligned}$$

14. Metodą funkcji tworzących rozwiąż rekurencję

$$a_1 = -2, \quad a_n = 5a_{n-1} - 1, \quad n \geq 2.$$

15. Metodą funkcji tworzących wyznacz D_n , jeżeli

$$D_n = nD_{n-1} + 2^n, \quad n \geq 2, \quad D_1 = 1.$$

16. Korzystając z funkcji tworzących, znajdź wzór jawny na a_n , jeśli

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{4}a_{n-1} - a_n \quad \text{dla } n \geq 1.$$

17. Metodą funkcji tworzących wyznacz b_n , jeżeli $b_n = 3nb_{n-1}$ dla $n \geq 1$ i $b_0 = 2$.

18. Wyznacz funkcję tworzącą ciąg (a_n) spełniającego rekurencję

$$a_n = a_{n-2} - 3a_{n-1} + 4^n - 1, \quad a_0 = 1, a_1 = 0.$$

19. Znajdź równanie rekurencyjne dla liczby a_n podziałów zbioru $[n]$ na trzy niepuste podzbiory (kolejność nieistotna), a następnie znajdź wzór jawny na a_n .

20. Znajdź równanie rekurencyjne dla a_n – liczby sposobów połączenia w pary wierzchołków wypukłego $2n$ -kąta za pomocą nieprzecinających się odcinków (boki, przekątne). Następnie, korzystając z rozwiązania przykładu na wykładzie (o nawiasach wyznaczających kolejność mnożenia), znajdź wzór jawny na a_n .