Notacja asymptotyczna

Funkcja asymptotycznie niewiększa od funkcji $g(n)$ to taka funkcja $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, dla której istnieją $c > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$, że dla wszystkich $n \geqslant n_0$:

$$|f(n)| \leqslant c \cdot |g(n)| .$$

Zbiór funkcji asymptotycznie niewiększych niż $g(n)$ oznaczamy przez $O(g(n))$.

Funkcja asymptotycznie niemniejsza od funkcji $g(n)$ to taka funkcja $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, dla której istnieją $c > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$, że dla wszystkich $n \geqslant n_0$:

$$c \cdot |g(n)| \leqslant |f(n)| .$$

Zbiór funkcji asymptotycznie niemniejszych niż $g(n)$ oznaczamy przez $\Omega(g(n))$.

Funkcja asymptotycznie podobna do funkcji $g(n)$ to taka funkcja $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, dla której istnieją $c_0, c_1 > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$, że dla wszystkich $n \geqslant n_0$:

$$c_0 \cdot |g(n)| \leqslant |f(n)| \leqslant c_1 \cdot |g(n)| .$$

Zbiór funkcji asymptotycznie podobnych do $g(n)$ oznaczamy przez $\Theta(g(n))$. A zatem $\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$.

Np. $\log n = O(n)$, $n^2 = \Omega(n)$, $n = O(n)$, $n = \Omega(n)$, $n = \Theta(n)$, $20n = \Theta(n)$.

Twierdzenie o rekurencji uniwersalnej

Niech $a \geqslant 1$ i $b > 1$ będa stałymi, niech $f(n)$ będzie pewną funkcją i niech $T(n)$ będzie zdefiniowane dla nieujemnych liczb całkowitych przez rekurencję

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

gdzie n/b oznacza $\lfloor n/b \rfloor$ lub $\lceil n/b \rceil$. Wtedy funkcja $T(n)$ może być ograniczona asymptotycznie w następujacy sposób:

1. Jeśli $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$, dla pewnej stałej $\epsilon > 0$, to $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
2. Jeśli $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, to $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$.
3. Jeśli $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$, dla pewnej stałej $\epsilon > 0$ i jeśli $af(n/b) \leqslant cf(n)$, dla pewnej stałej $c < 1$ i wszystkich dostatecznie duzych n, to $T(n) = \Theta(f(n))$.