

Wprowadzenie do logiki
Klasyczny Rachunek Zdań
część 3

Mariusz Urbański

Instytut Psychologii UAM
Mariusz.Urbanski@amu.edu.pl

Plan gry:

- 1 Czym są zdania?
- 2 Język Klasycznego Rachunku Zdań – syntaktyka
- 3 Język Klasycznego Rachunku Zdań – semantyka
- 4 Schematy zdań języka potocznego w języku KRZ
- 5 Metoda zerojedynkowa

- 1 Czym są zdania?
- 2 Język Klasycznego Rachunku Zdań – syntaktyka
- 3 Język Klasycznego Rachunku Zdań – semantyka
- 4 Schematy zdań języka potocznego w języku KRZ
- 5 Metoda zerojedynkowa

Co mają ze sobą wspólnego zdania:

- Jeżeli Jaś kocha Małgosię, to jest narażony na kontakty z mamą Małgosi.

oraz

- Jeżeli Księżyc jest zbudowany z żółtego sera, to na Marsie żyją małe, zielone ludziki.

?

Wspólna jest ich **struktura**:

- Jeżeli **Jaś kocha Małgosię**, to **jest narażony na kontakty z mamą Małgosi**.
- Jeżeli **Księżyc jest zbudowany z żółtego sera**, to **na Marsie żyją małe, zielone ludziki**.
- Jeżeli , to .

Schematy zdań

Schemat zdania (języka potocznego) w języku KRZ otrzymujemy, zastępując spójniki zdaniowe ich symbolicznymi odpowiednikami, zaś zdania proste, które te spójniki wiążą – zmiennymi zdaniowymi.

Schematem zdań o strukturze:

Jeżeli , to .

jest formuła:

$$p \rightarrow q$$

albo jakakolwiek inna, tak samo zbudowana:

$$q \rightarrow r, p \rightarrow s, r \rightarrow t, \dots$$

Przy budowaniu schematów zdań języka potocznego w języku KRZ obowiązują dwie proste zasady:

- 1 różne zdania proste reprezentujemy różnymi zmiennymi, te same – tymi samymi;
- 2 każdy spójnik ekstensjonalny, występujący w zdaniu, musi znaleźć swoją symboliczną reprezentację w schemacie zdania.

Z uwagi na 1. schematem zdania „Jak pada deszcz, to deszcz pada” będzie, np., formuła ' $p \rightarrow p$ ', a nie ' $p \rightarrow q$ '.

Z uwagi na 2. schematem zdania „Jan nie pije, ale pali” jest, np., formuła ' $\neg p \wedge q$ ', a nie formuła ' p ' bądź ' $p \wedge q$ '.

- 1 Czym są zdania?
- 2 Język Klasycznego Rachunku Zdań – syntaktyka
- 3 Język Klasycznego Rachunku Zdań – semantyka
- 4 Schematy zdań języka potocznego w języku KRZ
- 5 Metoda zerojedynkowa

Znając strukturę zdania i wartości logiczne zdań prostych, z których jest ono zbudowane, możemy ustalić wartość logiczną całości, korzystając z prostych rachunków.

Rozważmy zdanie:

Jeśli Jaś wystaje codziennie pod oknami Małgosi lub wysyła jej listy na papierze w serduszka, to Małgosia nie jest mu obojętna.

Jego schematem jest formuła:

$$p \vee q \rightarrow \neg r$$

Metoda zerojedynkowa

Założmy dalej, że Jaś wystaje pod oknami Małgosi, do listów z serduszkami się co prawda nie posunął, ale od obojętności względem Małgosi jest daleki. Zatem:

- wartość logiczna zdania, reprezentowanego zmienną p (Jaś wystaje pod oknami Małgosi) wynosi 1;
- wartość logiczna zdania, reprezentowanego zmienną q (Jaś wysyła Małgosi listy na papierze w serduszka) wynosi 0;
- wartość logiczna zdania, reprezentowanego zmienną r (Małgosia jest Jasiowi obojętna) wynosi 0.

Podstawiając wartości do formuły

$$p \vee q \rightarrow \neg r$$

otrzymujemy:

$$1 \vee 0 \rightarrow \neg 0$$

Metoda zerojedynkowa

$$1 \vee 0 \rightarrow \neg 0$$

z definicji negacji otrzymujemy:

$$1 \vee 0 \rightarrow \mathbf{1}$$

A	$\neg A$
1	0
0	1

Metoda zerojedynekowa

$$1 \vee 0 \rightarrow \neg 0$$

$$\mathbf{1} \vee \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{1}$$

z definicji alternatywy:

$$\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{1}$$

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Metoda zerojedynekowa

$$1 \vee 0 \rightarrow \neg 0$$

$$1 \vee 0 \rightarrow 1$$

$$\mathbf{1 \rightarrow 1}$$

wreszcie, z definicji implikacji:

1

A	B	$A \rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Metoda zerojedynkowa

$$1 \vee 0 \rightarrow \neg 0$$

$$1 \vee 0 \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow 1$$

1

A zatem, jeśli Jaś wystaje pod oknami Małgosi, od obojętności względem niej jest daleki, ale do listów z serduszkami się nie posunął, to zdanie „Jeśli Jaś wystaje codziennie pod oknami Małgosi lub wysyła jej listy na papierze w serduszka, to Małgosia nie jest mu obojętna” jest **prawdziwe**.

A gdyby jednak poszalał z papierem, to czy zdanie to dalej byłoby prawdziwe? A gdyby dał spokój z wystawaniem? A gdyby ...?

Metoda zerojedynkowa

Zdanie „Jeśli Jaś wystaje codziennie pod oknami Małgosi lub wysyła jej listy na papierze w serduszka, to Małgosia nie jest mu obojętna” zbudowane jest z trzech różnych zdań prostych. Wartości logiczne trzech różnych zdań prostych mogą poukładać się na 8 sposobów:

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Korzystając z tego faktu i z ekstensjonalności spójników, przy użyciu których owo zdanie jest złożone, możemy zbudować tabelę zerojedynkową, charakteryzującą prawdziwościowe własności zdania o Jasiu i Małgosi – i każdego zdania o takiej samej strukturze.

Przepis jest prosty:

Metoda zerojedynkowa

Weźmiesz formułę grzeczną, dobrze narychtowaną, wedle definicji.

I wypiszesz zmienne zdaniowe wszystkie, co w niej występują. A bacz, co by ino różnokształtne zmienne wypisać, byś roboty nie przysparzał sobie po próżnicy.

I wszystkie kombinacje wartości logicznych dla zmiennych wypiszesz, a liczba ich jest 2^n , a n jest liczba zmiennych w formule, ale ino tych różnokształtnych.

I podformuły wszystkie wypiszesz, co to ich wartości policzyć trza, co by wartość całej formuły skalkulować.

I liczyć będziesz wartości onych podformuł, a nie inaczej jak tylko wedle matryc, co spójniki definiują. I na boki rozglądać się nie będziesz, ino chyżo tabelkę wypełnisz, a matryce w rozumie masz mieć zapamiętane.

Metoda zerojedynkowa

Tabela zerojedynkowa dla formuły $p \vee q \rightarrow \neg r$:

p	q	r	$\neg r$	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow \neg r$
1	1	1			
1	1	0			
1	0	1			
1	0	0			
0	1	1			
0	1	0			
0	0	1			
0	0	0			

Metoda zerojedynkowa

Tabela zerojedynkowa dla formuły $p \vee q \rightarrow \neg r$:

p	q	r	$\neg r$	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow \neg r$
1	1	1	0		
1	1	0	1		
1	0	1	0		
1	0	0	1		
0	1	1	0		
0	1	0	1		
0	0	1	0		
0	0	0	1		

A	$\neg A$
1	0
0	1

Metoda zerojedynkowa

Tabela zerojedynkowa dla formuły $p \vee q \rightarrow \neg r$:

p	q	r	$\neg r$	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow \neg r$
1	1	1	0	1	
1	1	0	1	1	
1	0	1	0	1	
1	0	0	1	1	
0	1	1	0	1	
0	1	0	1	1	
0	0	1	0	0	
0	0	0	1	0	

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Metoda zerojedynkowa

Tabela zerojedynkowa dla formuły $p \vee q \rightarrow \neg r$:

p	q	r	$\neg r$	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow \neg r$
1	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	0	1	0	1

A	B	$A \rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Nb. tabela dla zdania:

„Jeśli w okolicy znajduje się Kura-Samograjka lub Uczone są Łososie, to nie będzie również kłopotu ze spotkaniem Kota w Butach’’

będzie wyglądała dokładnie tak samo. Dlaczego?

Metoda zerojedynkowa

Z uwagi na własności prawdziwościowe formuł języka KRZ wyróżnić możemy ich trzy rodzaje:

Tautologie

to formuły, które dla każdej kombinacji wartości logicznych zmiennych przyjmują wartość 1.

Kontrtautologie

to formuły, które dla każdej kombinacji wartości logicznych zmiennych przyjmują wartość 0.

Formuły syntetyczne

pozostałe.

Pozostanie:

- Pojęcie zdania w sensie logicznym;
- Syntaktyka języka KRZ: symbol, wyrażenie, formuła;
- Dwuwartościowość, ekstensjonalność, intensjonalność;
- Semantyka języka KRZ: tabele spójników;
- Schematy zdań języka potocznego w języku KRZ;
- Metoda zerojedynkowa. Pojęcia: tautologia, kontrtautologia, formuła syntetyczna.