Wprowadzenie do logiki
Klasyczny Rachunek Zdań
część 2

Mariusz Urbański

Instytut Psychologii UAM
Mariusz.Urbanski@amu.edu.pl

Plan gry:

1. Czym są zdania?
2. Język Klasycznego Rachunku Zdań – syntaktyka
3. Język Klasycznego Rachunku Zdań – semantyka
4. Schematy zdań języka potocznego w języku KRZ
5. Metoda zerojedynkowa

Język KRZ

Definicja 1: symbol języka KRZ

Symbolami *języka KRZ nazywamy:*

(i) $p, q, r, \ldots$ (zmienne zdaniowe)

(ii) $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, /, \downarrow, \perp$ (spójniki zdaniowe)

(iii) $(,)$ (znaki techniczne – nawiasy)

[definicja ta ustala alfabet języka KRZ]

Język KRZ

Definicja 2: wyrażenie języka KRZ

Wyrażeniem *języka KRZ nazywamy każdy skończony ciąg symboli tego języka.*

Kilka przykładów wyrażeń języka KRZ:

- $pppppppppppp\neg$
- $\neg(p \leftrightarrow q)$
- $(\neg)(\wedge)(\vee) \vee \vee /$

[definicja ta określa, w jaki sposób z symboli języka KRZ będziemy budować złożone całości]

Język KRZ

Definicja 3: formuła języka KRZ

(i) *każda zmienna zdaniowa jest formułą języka KRZ;*

(ii) *jeżeli wyrażenie A jest formułą języka KRZ, to wyrażenie '$\neg A$' również jest formułą języka KRZ;*

(iii) *jeżeli wyrażenia A i B są formułami języka KRZ, to wyrażenia '$(A \vee B)$', '$(A \wedge B)$', '$(A \rightarrow B)$', '$(A \leftrightarrow B)$', '(A/B)', '$(A \downarrow B)$', '$(A \perp B)$' również są formułami języka KRZ;*

(iv) nie ma innych formuł zdaniowych języka KRZ oprócz zmiennych zdaniowych i tych wyrażeń, które można skonstruować zgodnie z punktami (ii) i (iii).

[definicja ta określa, które z wyrażeń – skończonych ciągów symboli – języka KRZ uznawać będziemy za gramatycznie poprawne]

Język KRZ

Kilka przykładów formuł języka KRZ:

1. p — zmienna zdaniowa – pkt (i) definicji 3.
2. q — j.w.
3. $(\neg p)$ — z 1) i pkt (ii) definicji 3.
4. $(\neg p \vee q)$ — z 3), 2) i pkt (iii) definicji 3.
5. $(p \rightarrow (\neg p \vee q))$ — z 4), 1) i pkt (iii) definicji 3.

Zdefinowaliśmy reguły słownikowe i składniowe języka KRZ: wiemy jakie symbole w nim występują i jak budować poprawne wyrażenia złożone. Ale nie wiemy jeszcze, co to wszystko znaczy.

Żeby móc zdefiniować reguły semantyczne języka KRZ, musimy zatrzymać się przez chwilę przy dwóch zasadniczych założeniach, na których ufundowana jest logika klasyczna:

założeniu dwuwartościowości, które stwierdza, że każde zdanie przyjmuje jedną i tylko jedną z dwóch wartości logicznych (**0** albo **1**);

założeniu ekstensjonalności, które stwierdza, że wszystkie spójniki zdaniowe są spójnikami ekstensjonalnymi.

To pierwsze jest mniej więcej jasne. Przyjrzymy się więc bliżej temu drugiemu.

Ekstensjonalność

Rozważmy zdanie:

`Jaś umył nogi i Jaś umył ręce.`

Jego wartość logiczna zależy od tego, czy Jaś umył nogi i czy umył ręce. Jeśli Jaś wymył wszystkie kończyny, zdanie to jest prawdziwe. Załóżmy dalej, że Jaś umył nie tylko ręce i nogi, ale także zęby. Podstawmy zdanie „`Jaś umył zęby`” na miejsce zdania o rękach:

`Jaś umył nogi i Jaś umył zęby.`

Jaka jest wartość logiczna tego zdania?

Ekstensjonalność

Rzecz jasna, jest ono prawdziwe. Co więcej, jeżeli jako argumentów spójnika zdaniowego „i" użyjemy jakichkolwiek dwóch prawdziwych zdań (niezależnie od tego, czy będą one ze sobą treściowo powiązane, czy nie), w efekcie otrzymamy zdanie prawdziwe – zakładając, że w zdaniu takim (o strukturze: „A i B") będzie nam chodziło tylko o to, że jest tak jak głosi zdanie A oraz jest tak jak głosi zdanie B. Użyty w takim znaczeniu spójnik „i" jest spójnikiem **ekstensjonalnym**.

Zdaniowy spójnik ekstensjonalny

to spójnik zdaniowy który ma tę własność, że wartość logiczna zdania zbudowanego przy jego użyciu zależy wyłącznie od:

(i) charakterystyki prawdziwościowej spójnika oraz

(ii) wartości logicznych (-ej) jego argumentów (-u).

Ekstensjonalność

Rzecz jasna, jest ono prawdziwe. Co więcej, jeżeli jako argumentów spójnika zdaniowego „i” użyjemy jakichkolwiek dwóch prawdziwych zdań (niezależnie od tego, czy będą one ze sobą treściowo powiązane, czy nie), w efekcie otrzymamy zdanie prawdziwe – zakładając, że w zdaniu takim (o strukturze: „A i B”) będzie nam chodziło tylko o to, że jest tak jak głosi zdanie A oraz jest tak jak głosi zdanie B. Użyty w takim znaczeniu spójnik „i” jest spójnikiem ekstensjonalnym.

Zdaniowy spójnik ekstensjonalny

to spójnik zdaniowy który ma tę własność, że wartość logiczna zdania zbudowanego przy jego użyciu zależy wyłącznie od:

(i) charakterystyki prawdziwościowej spójnika oraz

(ii) wartości logicznych (-ej) jego argumentów (-u).

Rozważmy dla odmiany zdanie:

`Jaś wierzy, że 2+2 = 4.`

Jego prawdziwość zależy od stanu przekonań Jasia. Jeśli Jaś rzeczywiście wierzy, ze suma 2 i 2 to 4, zdanie to jest prawdziwe. Załóżmy, że Jaś nie jest zwolennikiem alternatywnej arytmetyki.

A jeśli na miejsce `,,2+2 = 4''`, czyli zdaniowego argumentu spójnika „wierzy, że”, wstawimy np. zdanie `,,Księżyc jest jedynym naturalnym satelitą Ziemi''`?

Na miejsce zdania prawdziwego wstawiamy inne zdanie prawdziwe. Ale czy mamy gwarancję, że zdanie

`Jaś wierzy, że Księżyc jest jedynym naturalnym satelitą Ziemi.`

jest prawdziwe, tak jak zdanie o arytmetycznych przekonaniach Jasia?

Intensjonalność

Nie mamy takiej gwarancji. Spójnik „wierzy, że” jest spójnikiem **intensjonalnym** – wartość logiczna zdania złożonego przy jego użyciu zależy od czegoś więcej niż tylko wartość logiczna argumentów. Dla wartości logicznej zdań:

- `Jaś wierzy, że 2+2 = 4.`
- `Jaś wierzy, że Księżyc jest jedynym naturalnym satelitą Ziemi.`

istotny jest stan przekonań Jasia – a nie jest powiedziane, że Jaś musi wierzyć w każdą prawdę (i nie wierzyć w żaden fałsz).

Spójniki ekstensjonalne

Żeby zdefiniować spójnik ekstensjonalny wystarczy zatem określić, jak wygląda wartość logiczna zdania złożonego przy jego użyciu, w zależności od wartości logicznych argumentów. Można to zrobić w sposób mniej lub bardziej rozwlekły; ograniczymy beletrystykę do minimum, zbierając definicje interesujących nas spójników ekstensjonalnych:

$$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, /, \downarrow, \bot$$

w tzw. **tabelach prawdziwościowych** (aka matrycach spójników).

Negacja

- symbol: $\neg$
- symbole alternatywne: $-$, $\sim$
- prozą: „nieprawda że”

A	$\neg A$
1	0
0	1

Koniunkcja

- symbol: $\wedge$
- symbole alternatywne: &, $\bullet$
- prozą: „i”

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Alternatywa (zwykła, nierozłączna)

- symbol: $\vee$
- prozą: „lub"

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Alternatywa rozłączna

- symbol: $\perp$
- prozą: „albo ... albo ...”

A	B	$A \perp B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Implikacja

- symbol: $\rightarrow$
- symbole alternatywne: $\Rightarrow$, $\supset$
- prozą: „jeżeli ... to ...”

A	B	$A \rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Równoważność

- symbol: $\leftrightarrow$
- symbole alternatywne: $\Leftrightarrow$, $\equiv$
- prozą: „wtedy i tylko wtedy, gdy"

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Dysjunkcja

- symbol: /
- prozą: „co najwyżej jedno z dwojga”

A	B	A/B
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Binegacja

- symbol: ↓
- prozą: „ani … ani …”

A	B	$A \downarrow B$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Opuszczanie nawiasów

Żeby oszczędzić sobie nieco rysowania przyjmiemy następującą **konwencję co do opuszczania nawiasów**:

1. nie będziemy stawiać nawiasów zewnętrznych, wokół całych formuł;
2. przyjmiemy następującą hierarchię siły wiązania spójników:
   1. $\neg$
   2. $\wedge, \vee$
   3. $\rightarrow, \leftrightarrow, /, \downarrow, \perp$

Opuszczanie nawiasów

Przyjrzyjmy się formule następującej, zapisanej zgodnie z definicją 3:

$$((p \land \neg r) \rightarrow (\neg p \lor q))$$

Pozbądźmy się teraz nawiasów, zgodnie z konwencją:

- nie będziemy stawiać nawiasów zewnętrznych, wokół całych formuł:

$$(p \land \neg r) \rightarrow (\neg p \lor q)$$

- spójniki $\land$ i $\lor$ wiążą silniej niż $\rightarrow$:

$$p \land \neg r \rightarrow \neg p \lor q$$