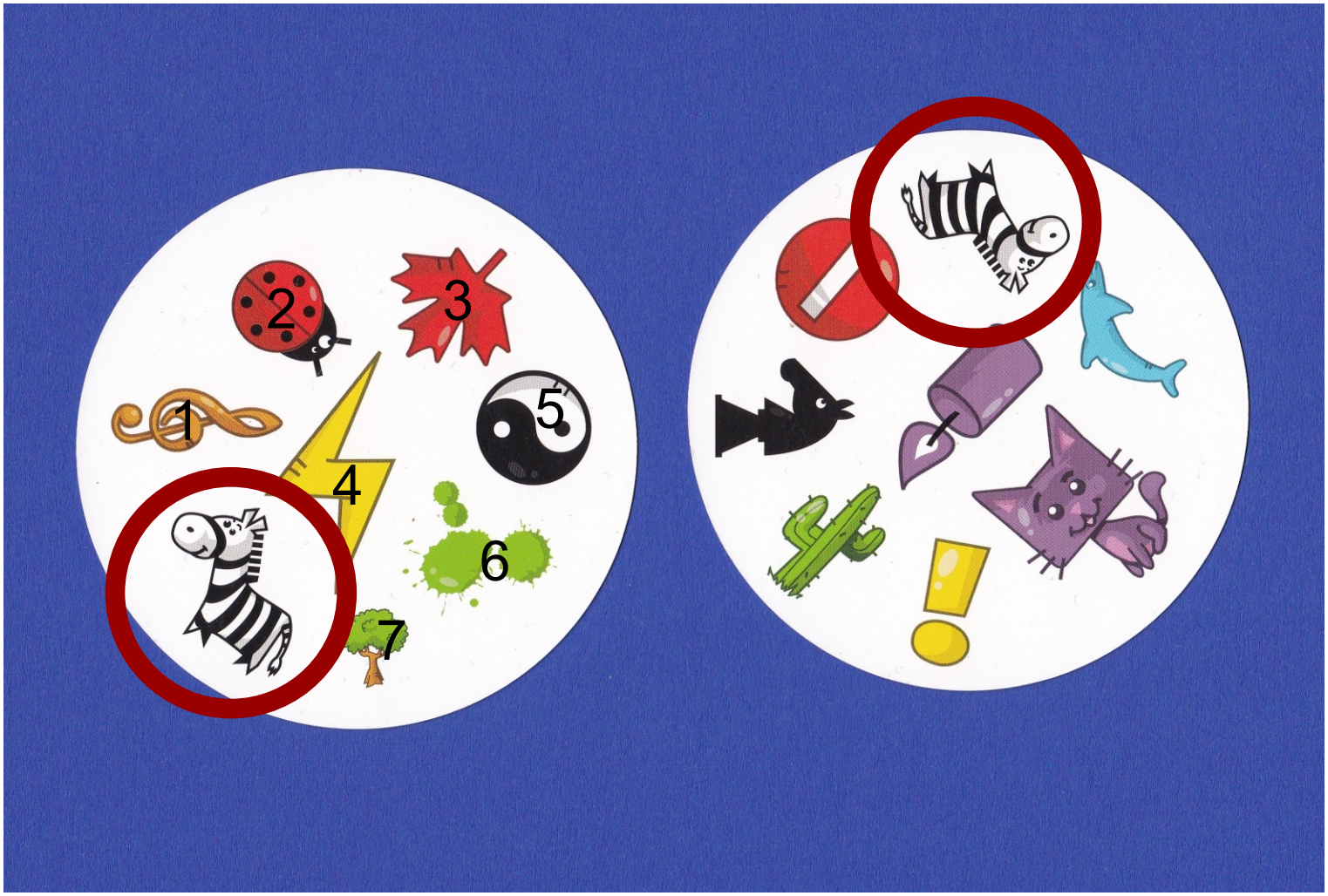
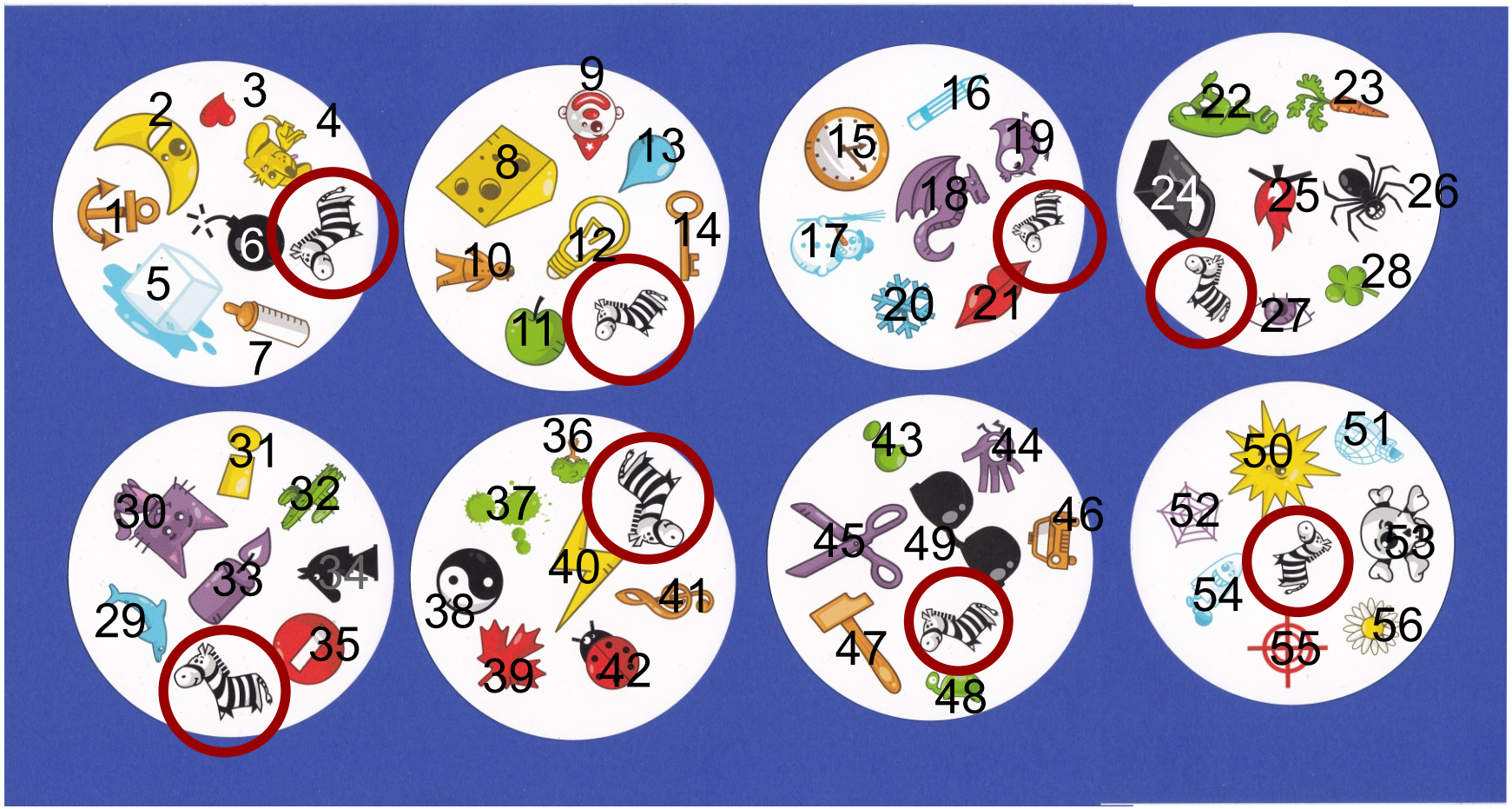
ZRÓBMY SOBIE DOƎBLE

Katarzyna Rybarczyk - Krzywdzińska

I. Co to jest Dobble?


1
2
3
4
5
6
7

II. Policzmy obrazki i karty.



$$\text{liczba kart z zebrą} = 8$$

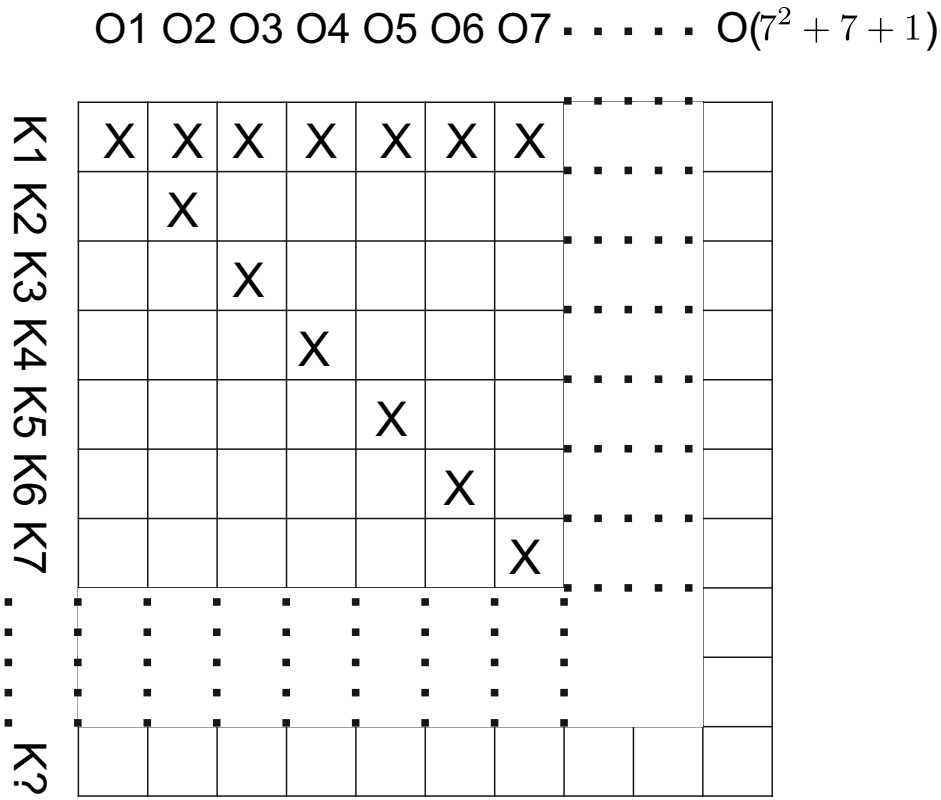
$$\text{liczba obrazków na karcie (nie licząc zebry)} = 7$$

$$\text{liczba obrazków, które widzimy w sumie} = 8 \cdot 7 + 1 = \mathbf{7^2 + 7 + 1 = 57}$$

Ile potencjalnie może być kart w talii z tą liczbą obrazków?

	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	⋯	O(7^2+7+1)
K1	X	X	X	X	X	X	X	⋯	
K2		X						⋯	
K3			X					⋯	
K4				X				⋯	
K5					X			⋯	
K6						X		⋯	
K7							X	⋯	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
K?									

Ile potencjalnie może być kart w talii z tą liczbą obrazków?



(liczba obrazków)· (liczba kart z danym obrazkiem) = (liczba kart)· (liczba obrazków na karcie)

$$(7^2+7+1)\cdot 8 = (\text{liczba kart})\cdot 8$$

$$\text{liczba kart} = 7^2+7+1 = 57$$

potencjalna liczba kart = potencjalna liczba obrazków = $7^2+7+1=57$

ale liczba kart w talii = 55

hmmmmm ?

III. Cele:

1. Jak można skonstruować własne Dobble?
2. Co kryje się za tajemniczymi wartościami:

$$7^2 + 7 + 1 = 57$$

$$1 + 7 = 8$$

?

3. Czy talia klasycznego Dobble mogłaby mieć 57 a nie 55 kart ?
4. Czy za talią Dobble kryje się jakieś twierdzenie?

1. Jak można skonstruować własne Dobble?

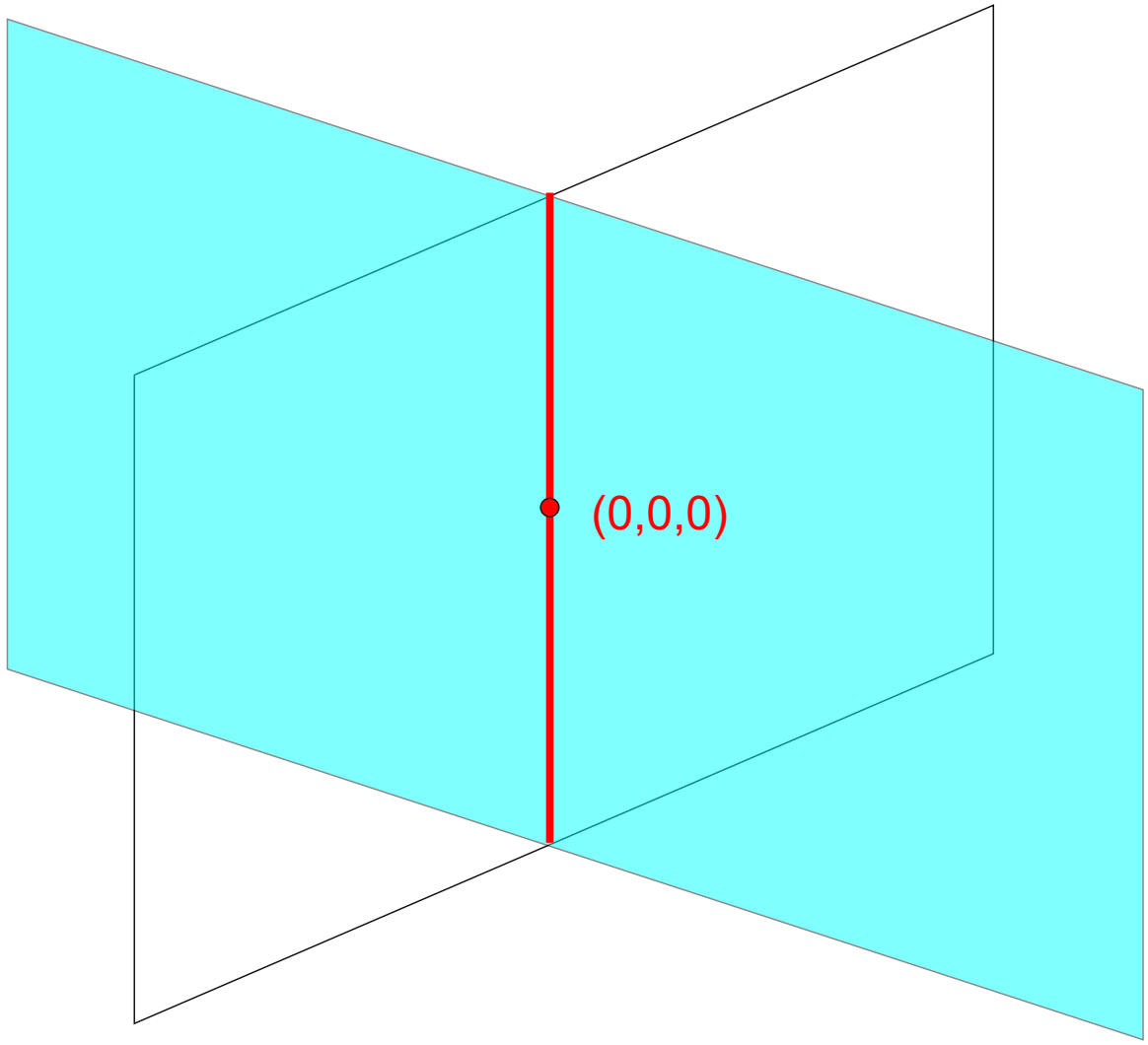
Chcemy, żeby:

- dowolne dwie karty miały DOKŁADNIE jeden wspólny obrazek;

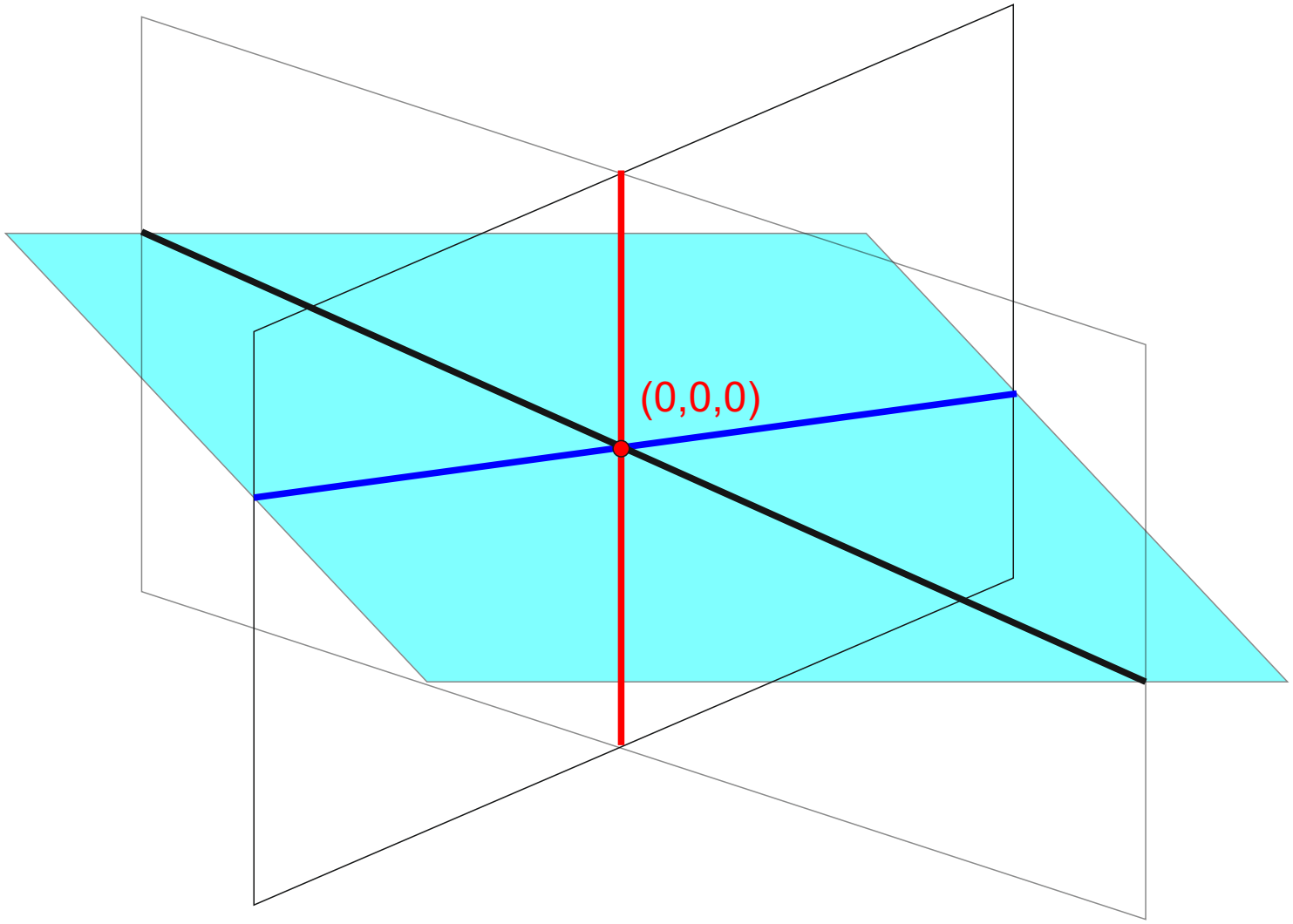
- nie było ŻADNEGO takiego obrazka, który jest na WSZYSTKICH kartach

- dowolne dwa obrazki należą do PEWNEJ WSPÓLNEJ DLA NICH karty

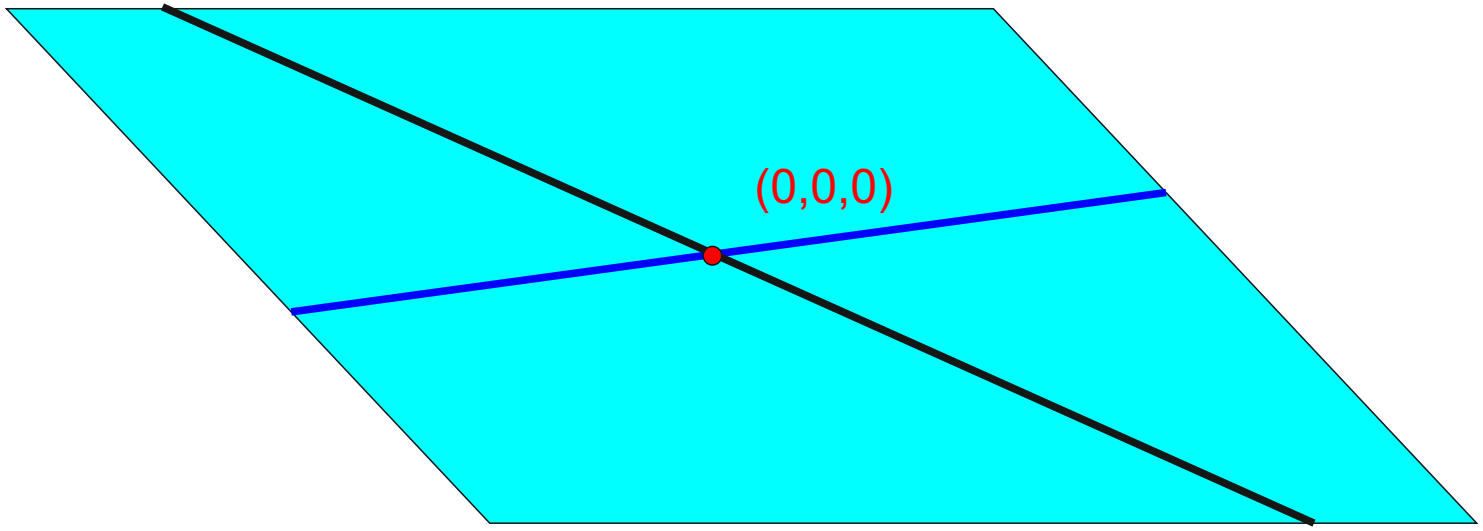
Ustalmy jeden punkt i rozważmy wszystkie proste i płaszczyzny przechodzące przez ten punkt



Dowolne dwie płaszczyzny mają dokładnie jedną wspólną prostą



Nie ma ŻADNEJ prostej, która należy do WSZYSTKICH płaszczyzn.



Dowolne dwie proste mają dokładnie jedną wspólną płaszczyznę.

Chcemy, żeby:

- dowolne dwie karty miały DOKŁADNIE jeden wspólny obrazek;

- nie było ŻADNEGO takiego obrazka, który jest na WSZYSTKICH kartach

- dowolne dwa obrazki należą do PEWNEJ WSPÓLNEJ DLA NICH karty

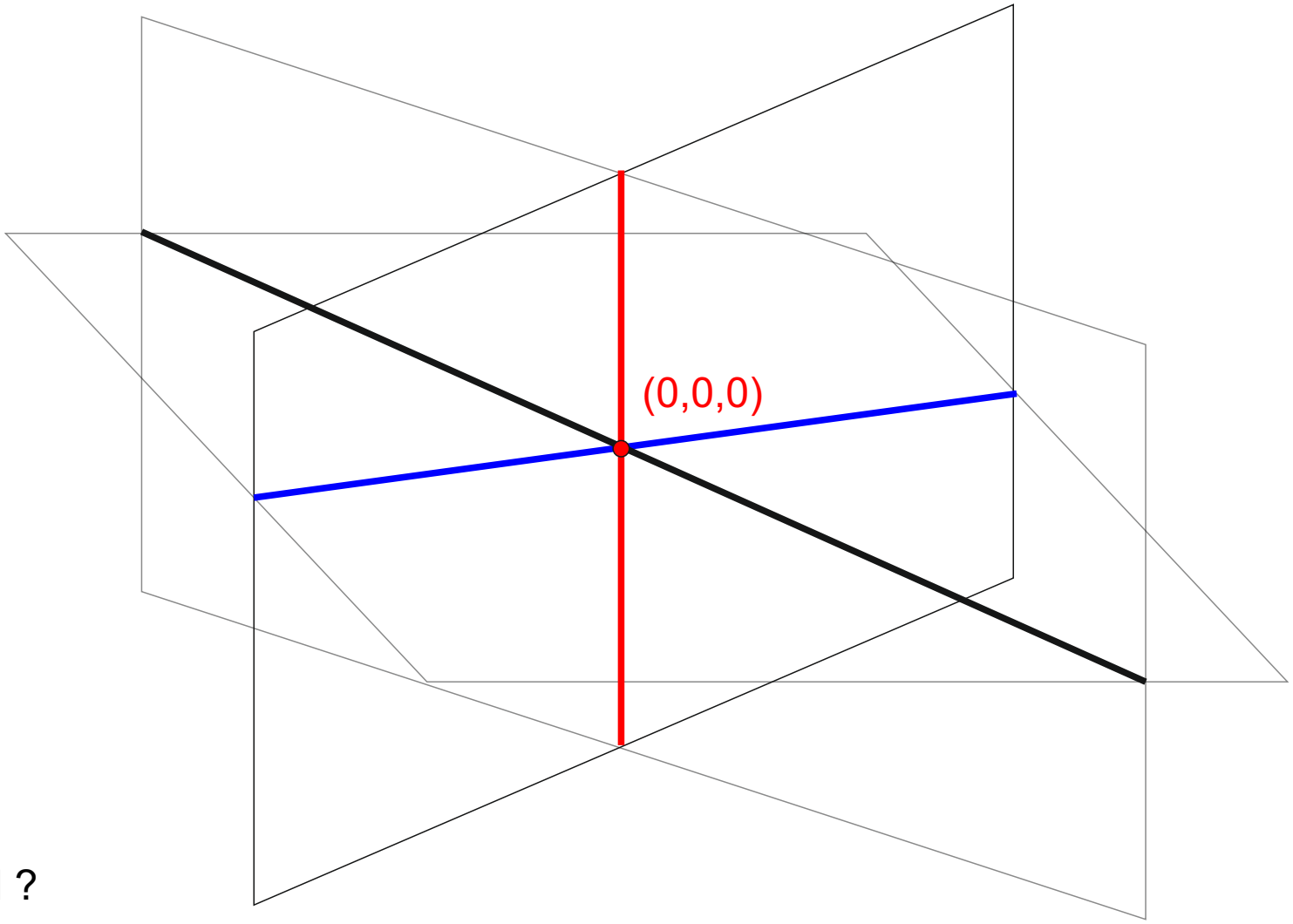
Co mamy?

- Dowolne dwie płaszczyzny mają DOKŁADNIE jedną wspólną prostą.

- Nie ma ŻADNEJ prostej, która należy do WSZYSTKICH płaszczyzn.

- Dowolne dwie proste należą do PEWNEJ JEDNEJ płaszczyzny.

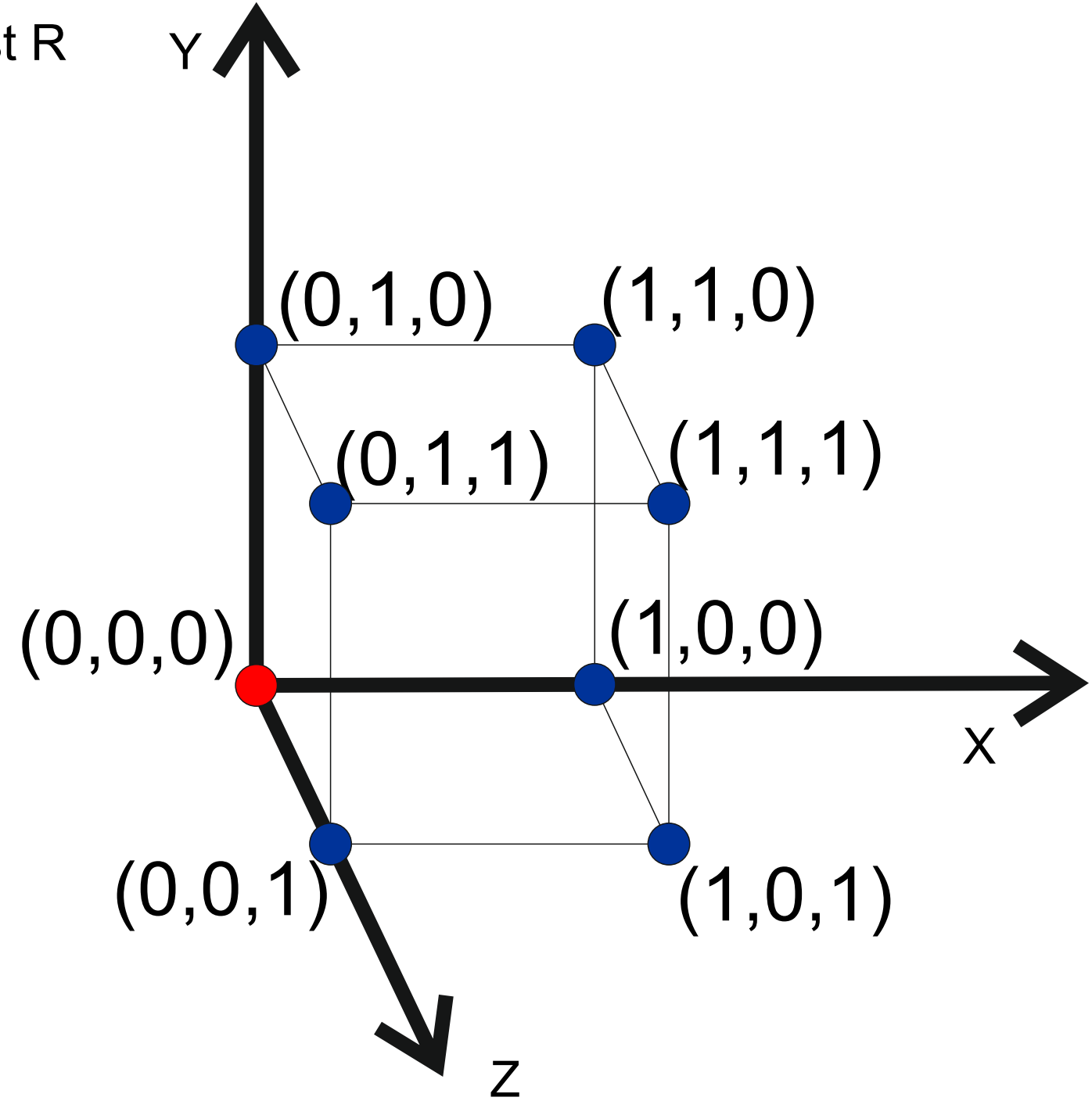
PROBLEM ?

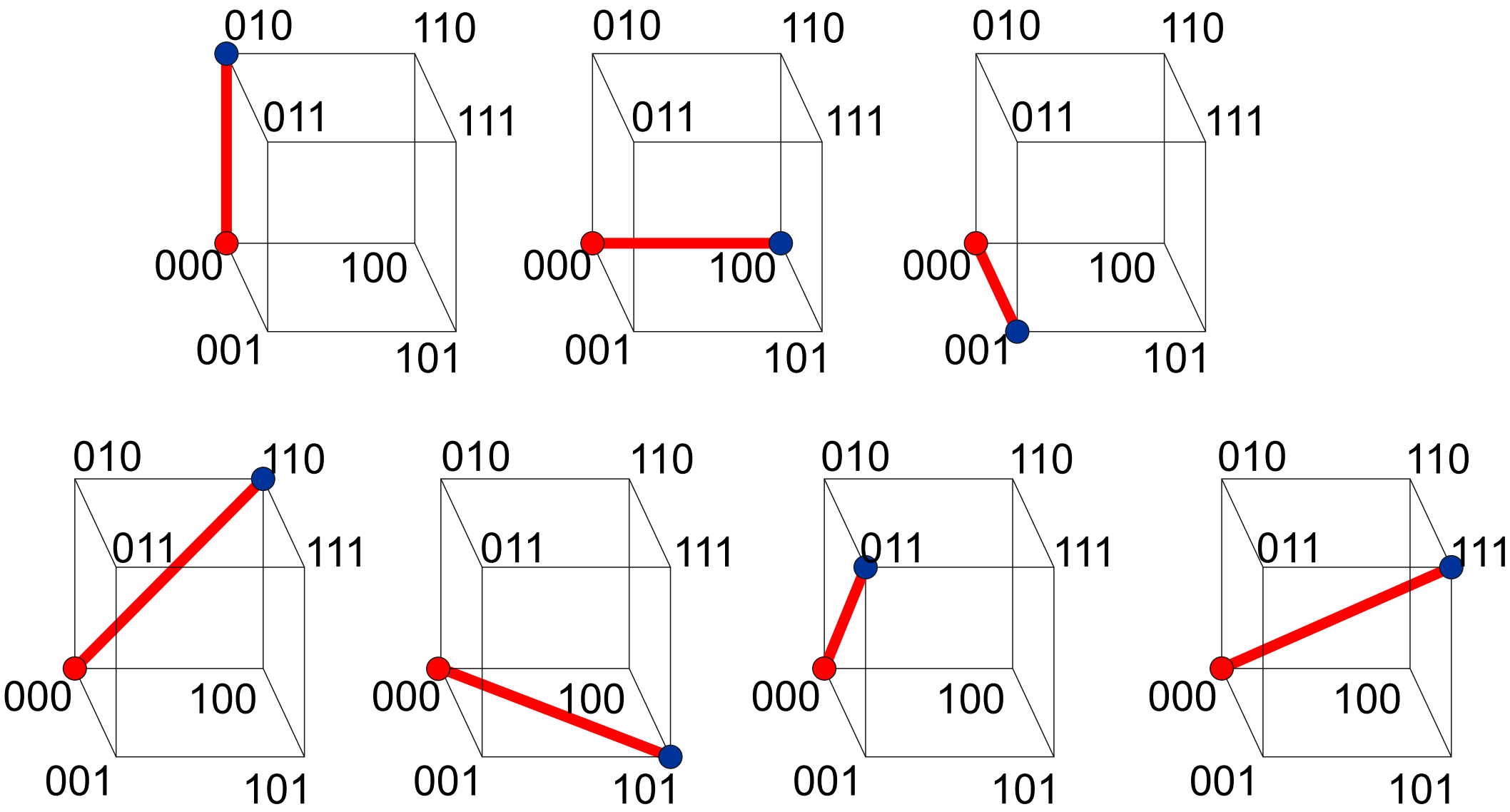


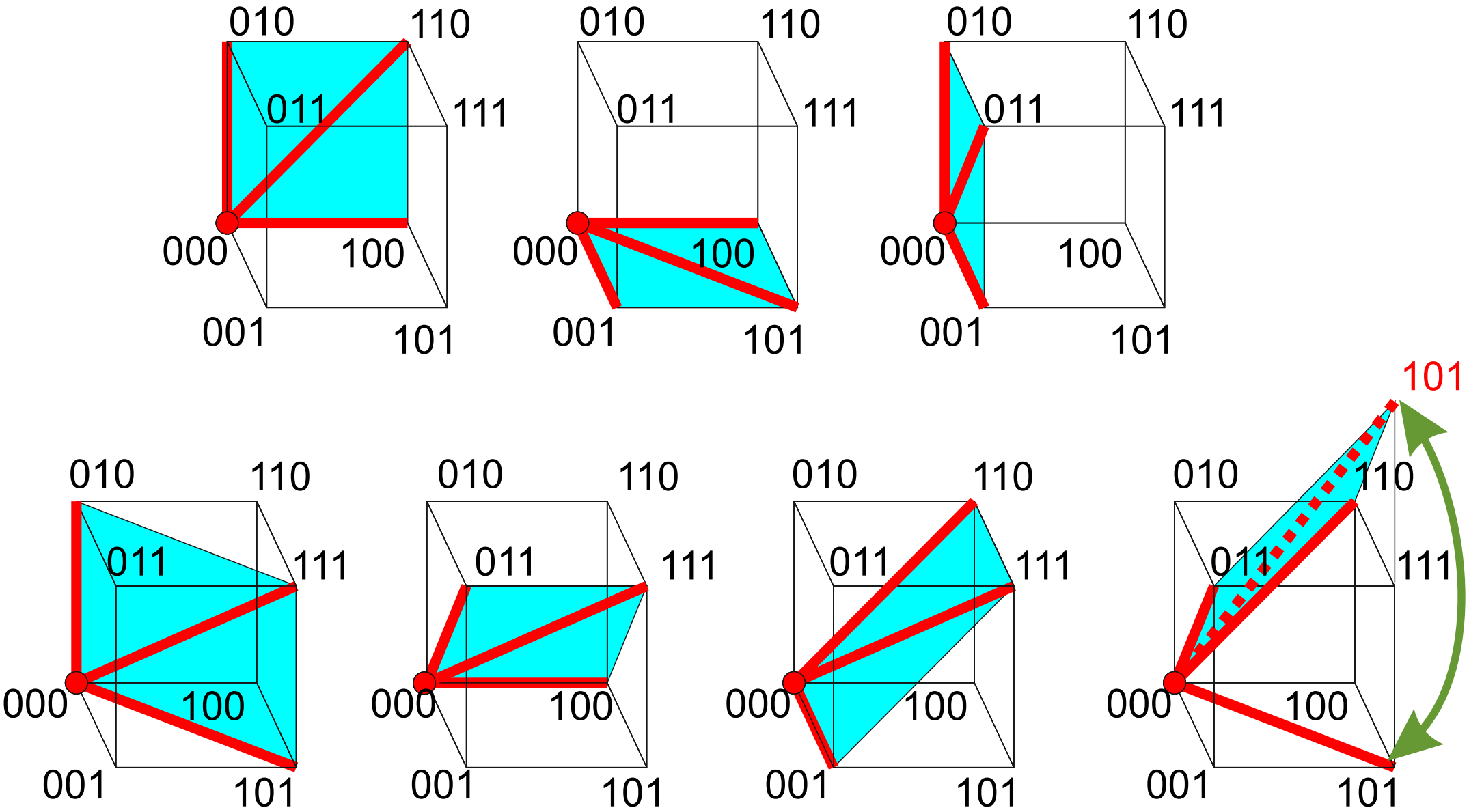
PROBLEM ?

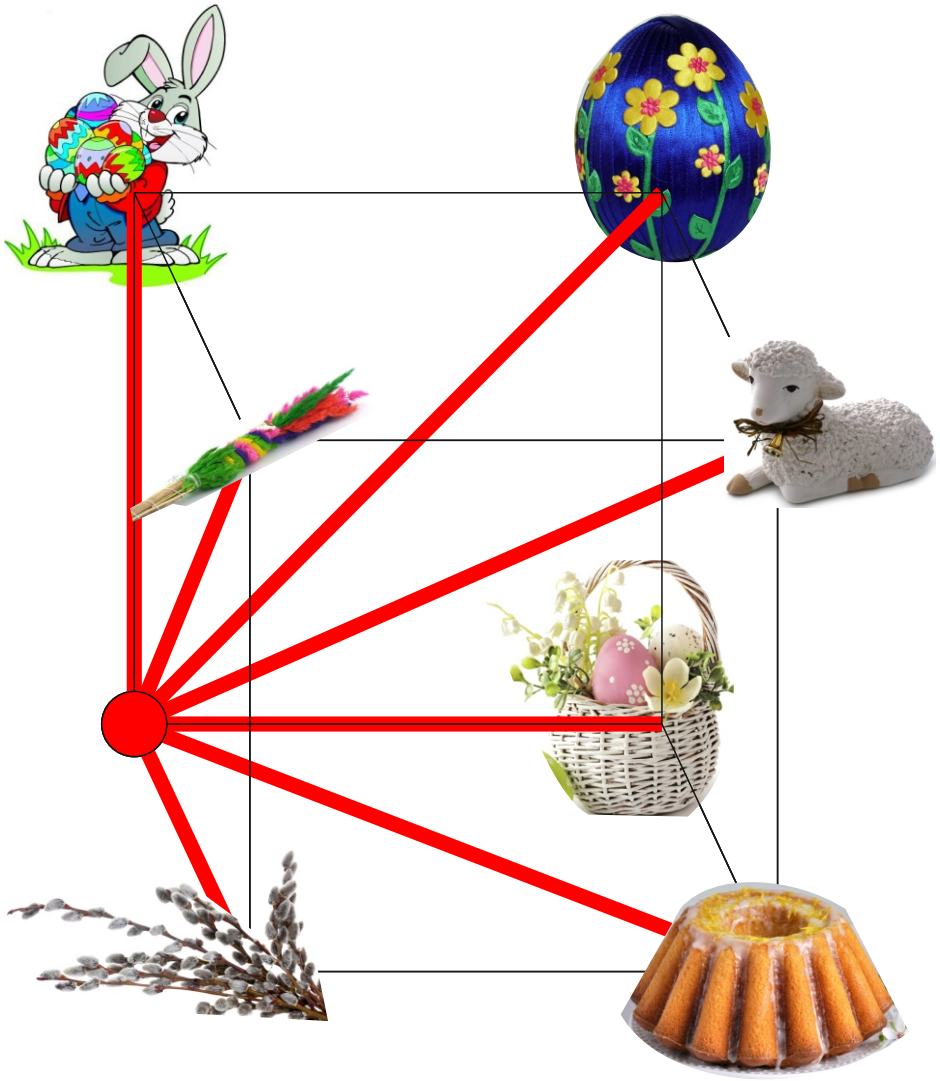
Prostych jest nieskończenie wiele, a my chcemy skończony zestaw kart.

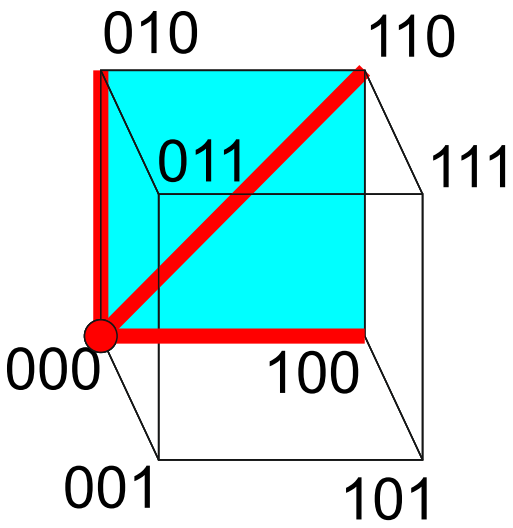
{0,1} zamiast R

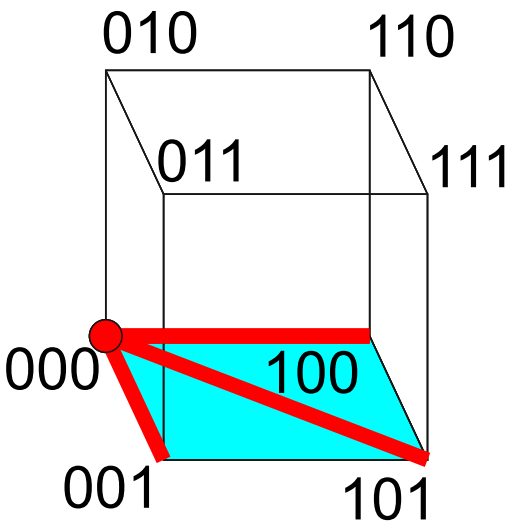


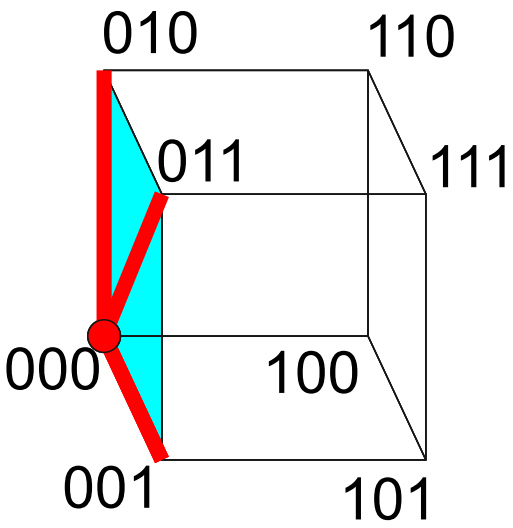

010
110
011
111
000
100
001
101
010
110
011
111
000
100
001
101
010
110
011
111
000
100
001
101
010
110
011
111
000
100
001
101
010
110
011
111
000
100
001
101
010
110
011
111
000
100
001
101
010
110
011
111
000
100
001
101

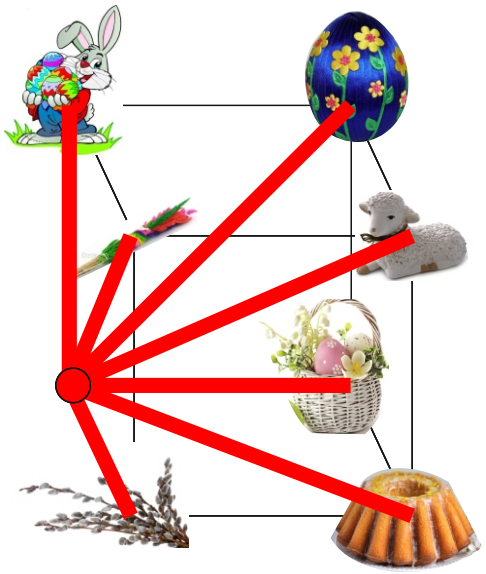

010
110
011
111
000
100
001
101
010
110
011
111
000
100
001
101
010
110
011
111
000
100
001
101
101
010
110
011
111
000
100
001
101
010
110
011
111
000
100
001
101
010
110
011
111
000
100
001
101
010
110
011
111
000
100
001
101




010
110
011
111
000
100
001
101


010
110
011
111
000
100
001
101


010
110
011
111
000
100
001
101



liczba kart = liczba obrazków = $2^2 + 2 + 1 = 7$

liczba obrazków na karcie = $1 + 2 = 3$

2. Co kryje się za tajemniczymi wartościami?

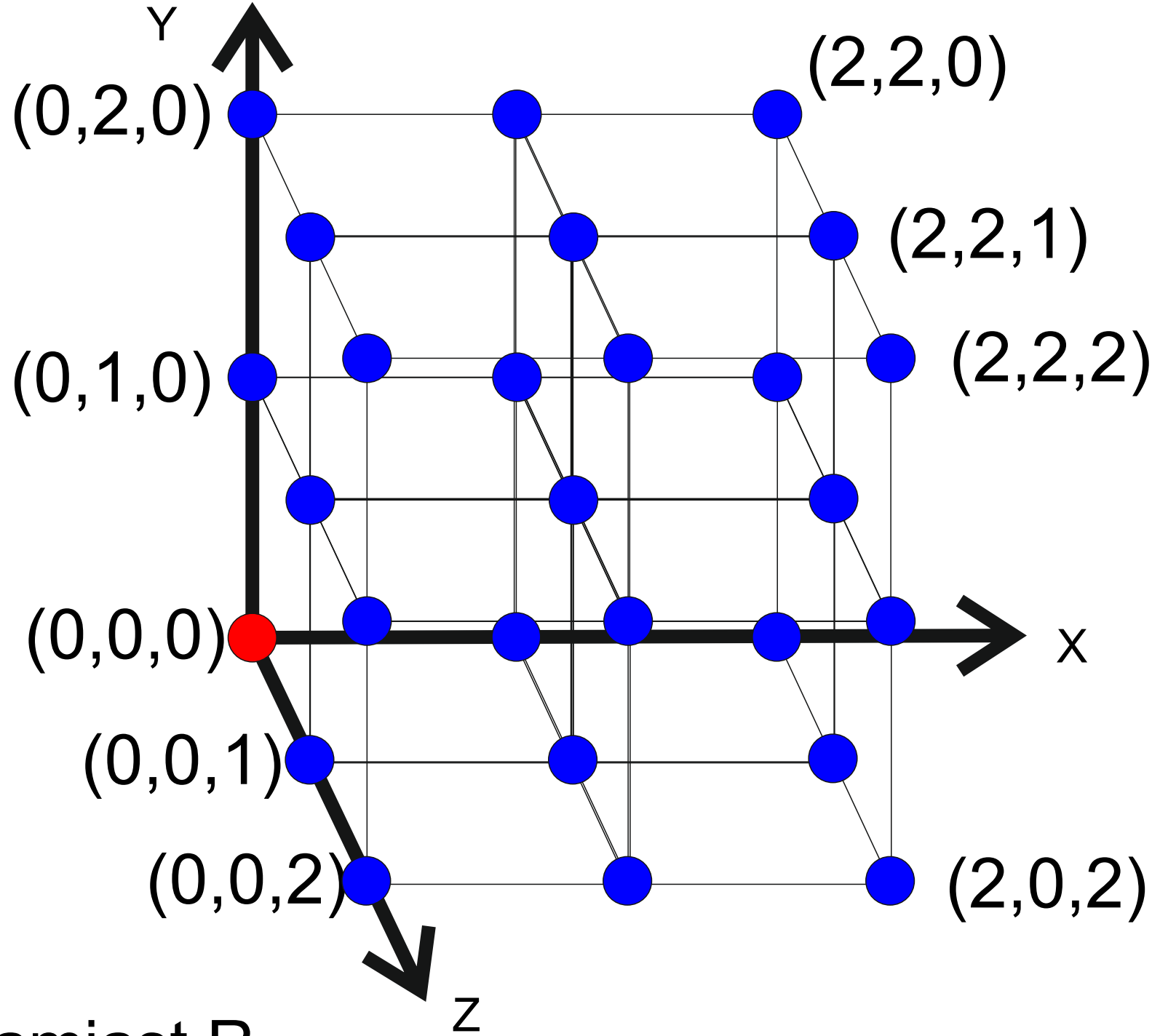
$$7^2 + 7 + 1 = 57$$

$$1 + 7 = 8$$

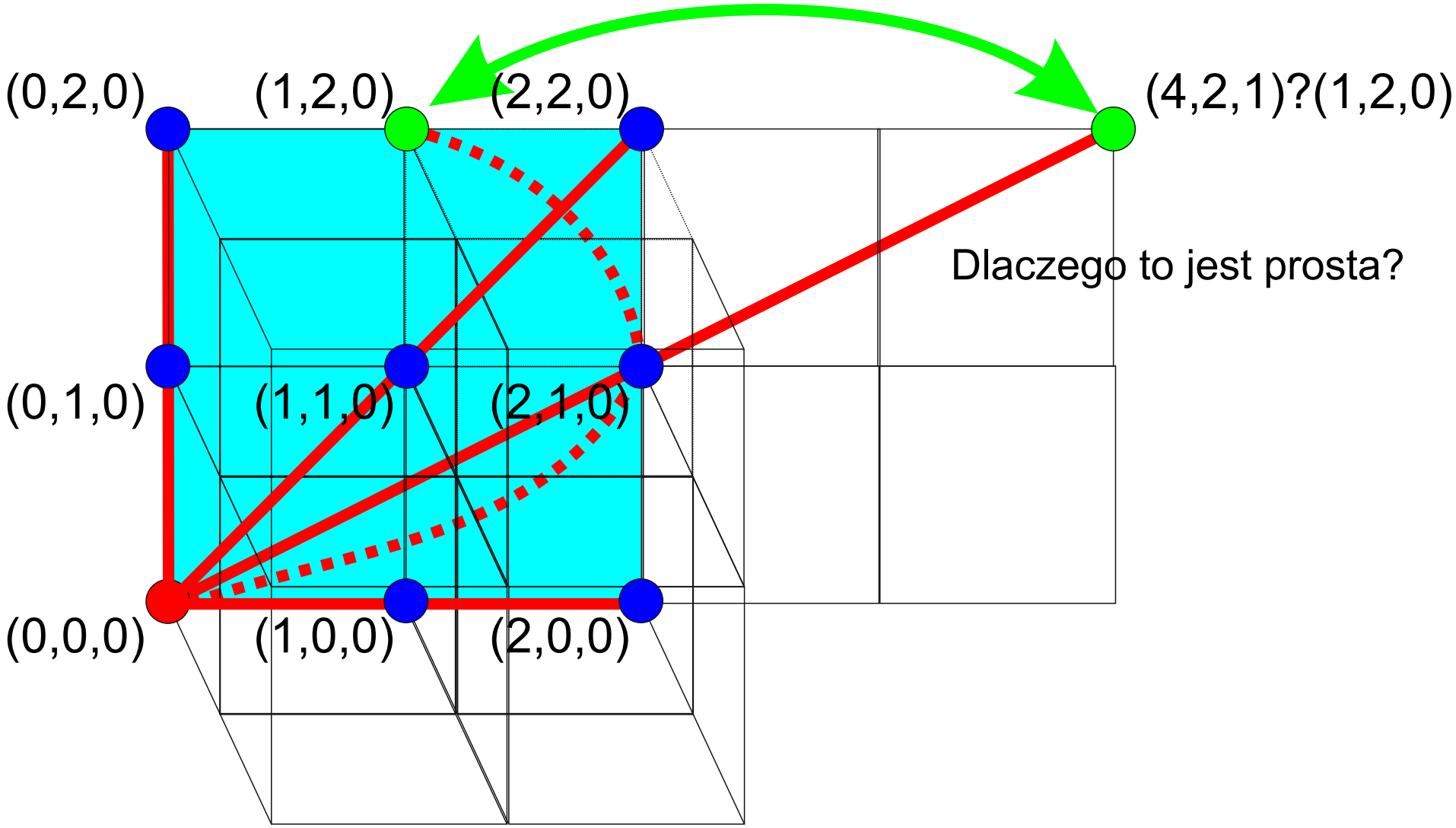
$$2^2 + 2 + 1 = 7$$

$$1 + 2 = 3$$

liczba obrazków = liczba kart
liczba obrazków na karcie = liczba kart z obrazkiem



{0,1,2} zamiast R



liczba punktów stanowiących prostą (nie licząc (0,0,0)) $= 2$

liczba punktów (bez (0,0,0)) $= 3^3 - 1 = 2 \cdot (3^2 + 3 + 1)$

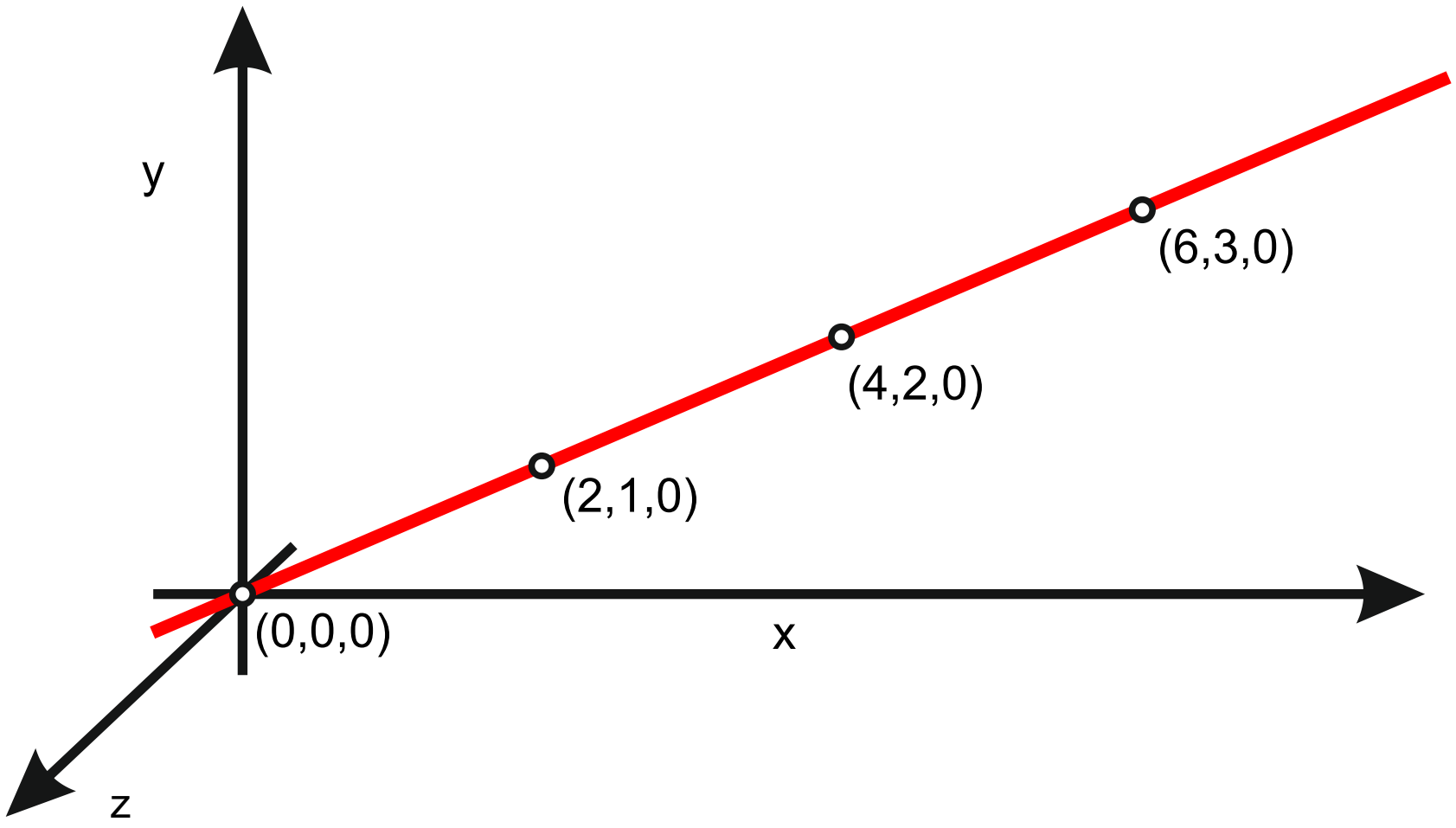
liczba obrazków = liczba prostych = liczba punktów : liczba punktów na prostej = $3^2 + 3 + 1$

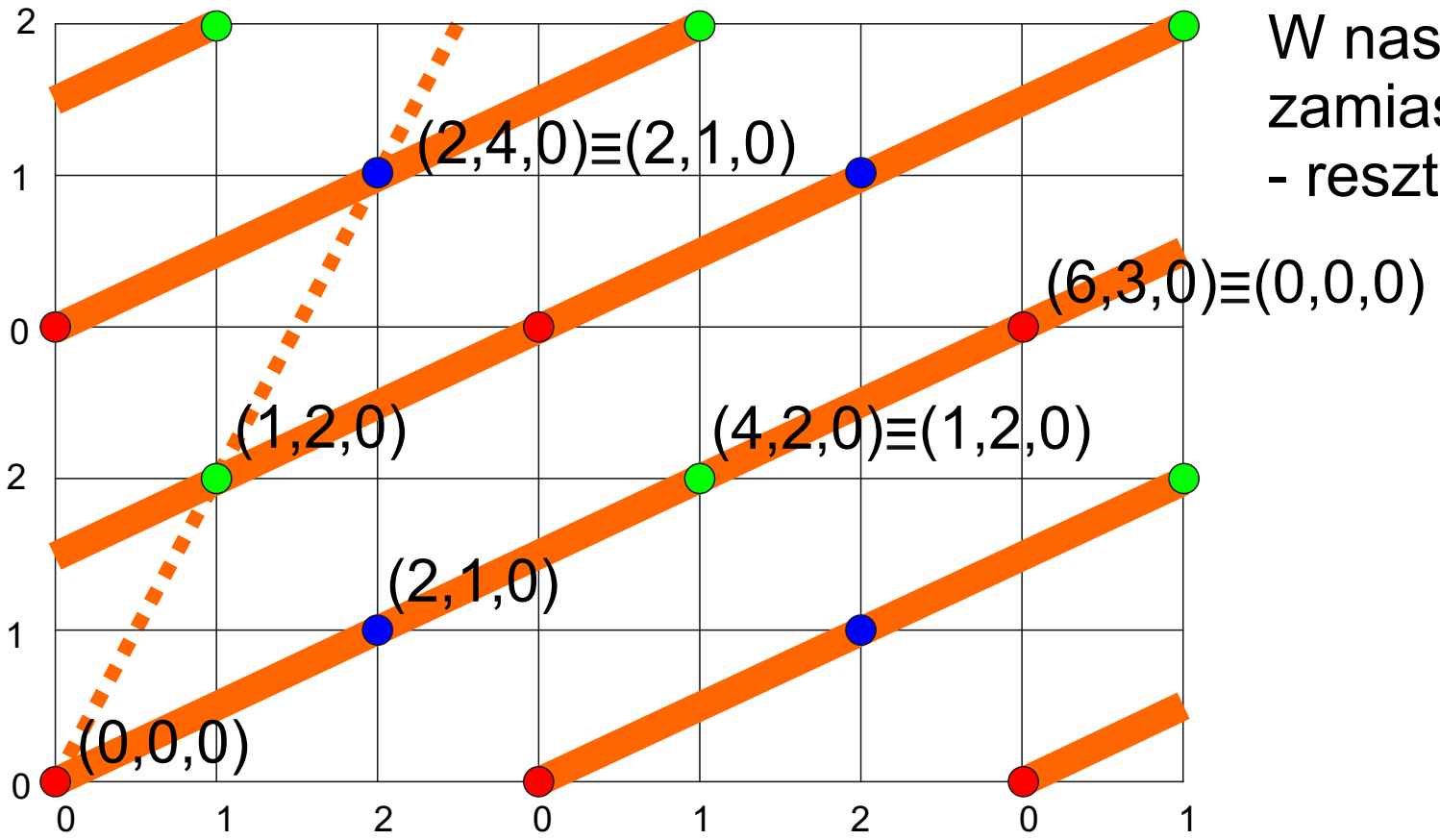
liczba obrazków na karcie = liczba prostych na płaszczyźnie = $1 + 3$

Z jakich punktów na płaszczyźnie XY składa się prosta przechodząca przez (0,0,0) i (2,1,0)?

Odp.: z punktów postaci: $a\cdot(2,1,0) = (2\cdot a, 1\cdot a, 0\cdot a)$, (a jest dowolną liczbą z R)

np. (4,2,0) i (6,3,0) należą do tej prostej





W naszym przypadku
zamiast R mamy {0,1,2}
- reszty z dzielenia przez 3

prosta zawierająca (2,1,0) - kierunek wyznaczony przez (2,1,0)
Pamiętając, że interesują nas tylko reszty z dzielenia przez 3:

2 * (2,1,0)	(4,2,0)	(1,2,0)
3 * (2,1,0)	(6,3,0)	(0,0,0)
4 * (2,1,0)	(8,4,0)	(2,1,0)

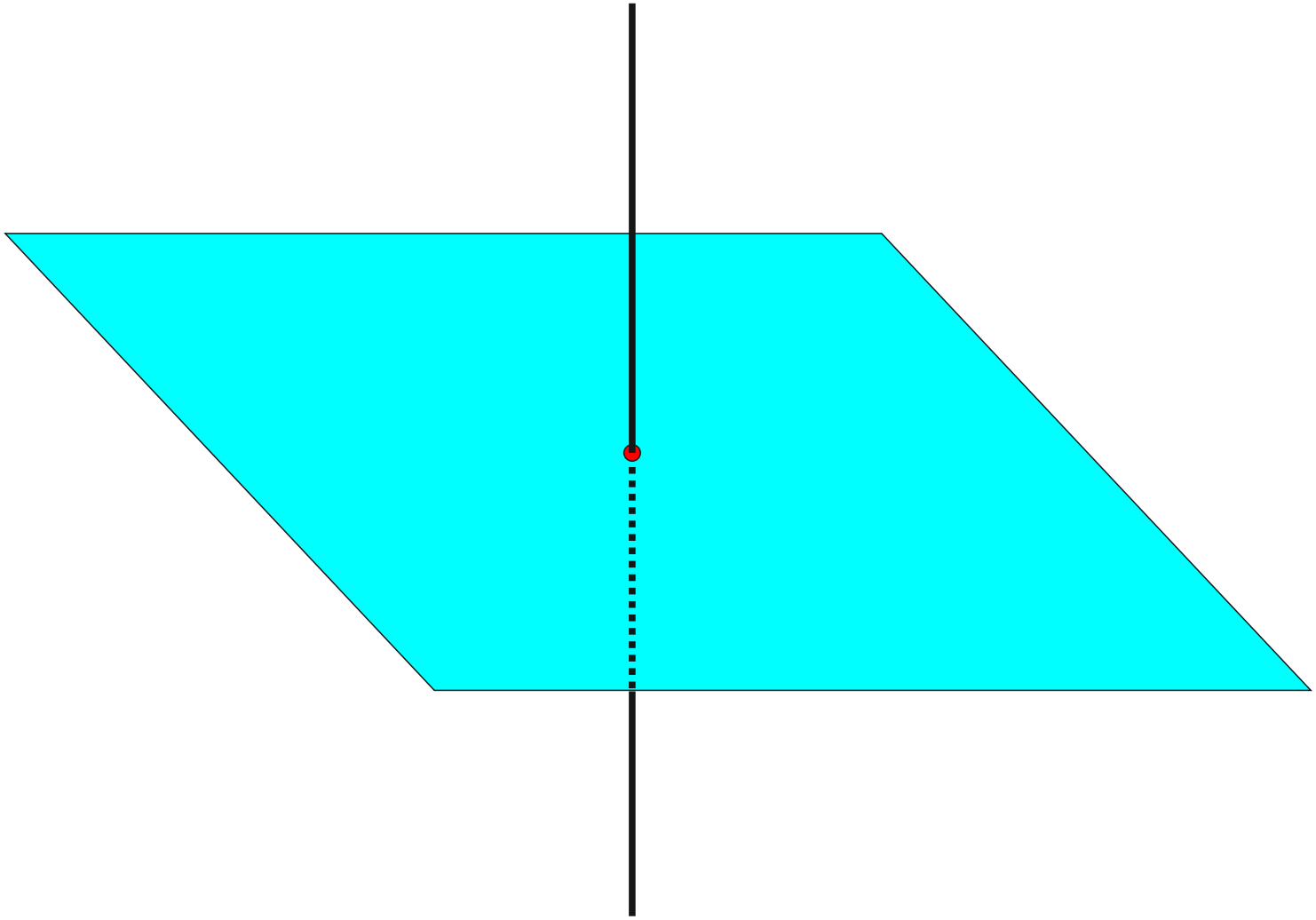
	OBRAZEK 1 (1,1,2) (2,2,1)	OBRAZEK 2 (1,1,1) (2,2,2)	OBRAZEK 3 (1,2,0) (2,1,0)	OBRAZEK 4 (1,1,0) (2,2,0)	OBRAZEK 5 (1,2,2) (2,1,1)	OBRAZEK 6 (1,0,1) (2,0,2)	OBRAZEK 7 (1,0,0) (2,0,0)	OBRAZEK 8 (0,0,1) (0,0,2)	OBRAZEK 9 (1,2,1) (2,1,2)	OBRAZEK 10 (0,1,2) (0,2,1)	OBRAZEK 11 (0,1,1) (0,2,2)	OBRAZEK 12 (0,1,0) (0,2,0)	OBRAZEK 13 (1,0,2) (2,0,1)
KARTA 1	●		●			●					●		
KARTA 2		●	●							●			●
KARTA 3	●	●		●				●					
KARTA 4			●		●			●	●				
KARTA 5				●	●	●				●			
KARTA 6	●				●							●	●
KARTA 7								●		●	●	●	
KARTA 8			●	●			●					●	
KARTA 9				●					●		●		●
KARTA 10		●			●		●				●		
KARTA 11	●						●		●	●			
KARTA 12						●	●	●					●
KARTA 13		●				●			●			●	

liczba obrazków = liczba kart = $3^2 + 3 + 1$

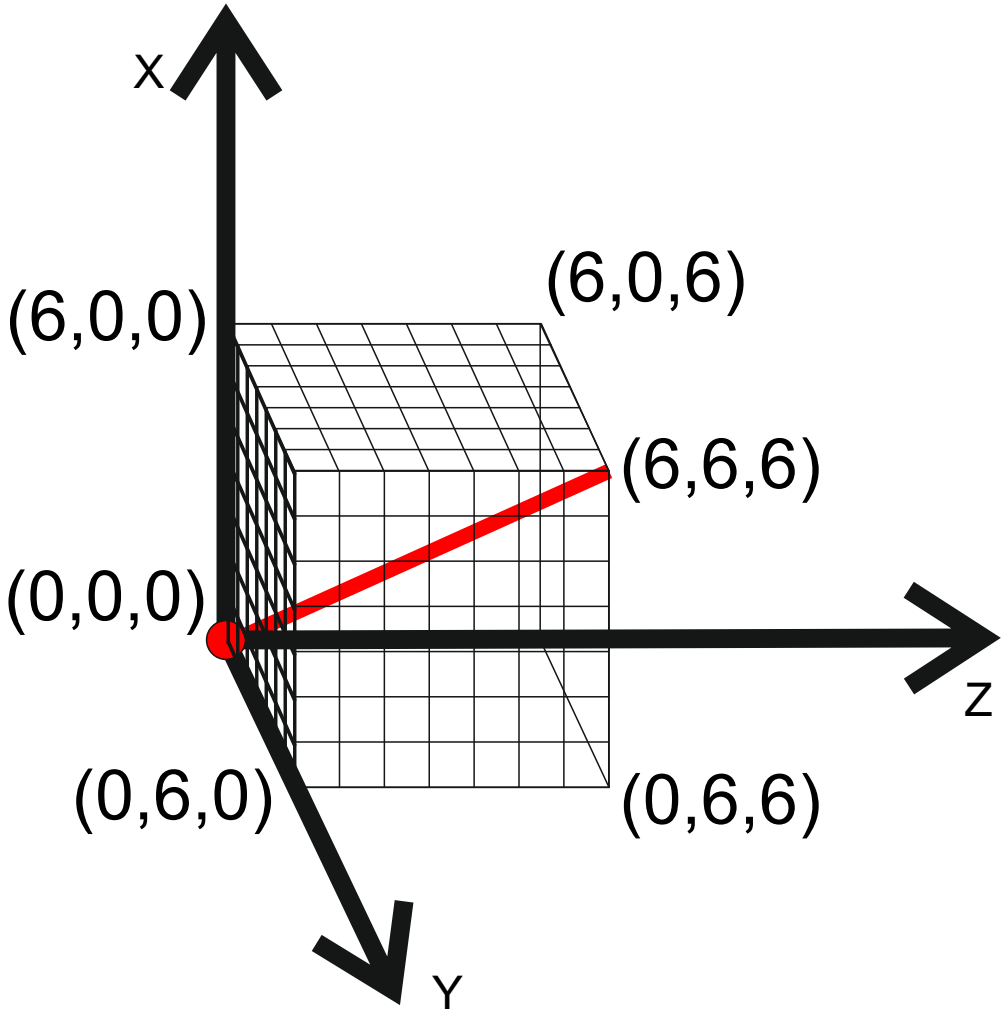
liczba obrazków na karcie = liczba kart z danym obrazkiem = $1 + 3$

Uwaga:

Dlaczego obrazków (prostych) jest tyle samo co kart (płaszczyzn)?



3. Czy talia klasycznego Dobble mogłaby mieć 57 a nie 55 kart ?



liczba punktów (bez (0,0,0)) = $7^3 - 1$

liczba punktów na prostej (bez (0,0,0)) = 6

liczba prostych = $\dfrac{7^3 - 1}{6} = 7^2 + 7 + 1$

liczba prostych na płaszczyźnie = $1 + 7 = 8$

przykłady prostych:
(0,0,0),(1,1,1),(2,2,2),(3,3,3),(4,4,4),(5,5,5),(6,6,6)
(0,0,0),(1,3,5),(2,6,3),(3,2,1),(4,5,6),(5,1,4),(6,4,2)

druga prosta odpowiada między innymi prostej w R^3 przechodzącej przez punkty:
(0,0,0),(1,3,5),(2,6,10),(3,9,15),(4,12,20),(5,15,25)(6,18,30)

3. Czy talia klasycznego Dobble mogłaby mieć 57 a nie 55 kart ?

liczba obrazków na karcie = $12 = 11 + 1$

maksymalna możliwa liczba kart =

$$= 11^2 + 11 + 1 = 133$$

kart w talii = 132

Gra Znaj Znak wydana przez IPN

Koksownik

Symbol obecności wojska na ulicach miast w czasie stanu wojennego

040

Kartki

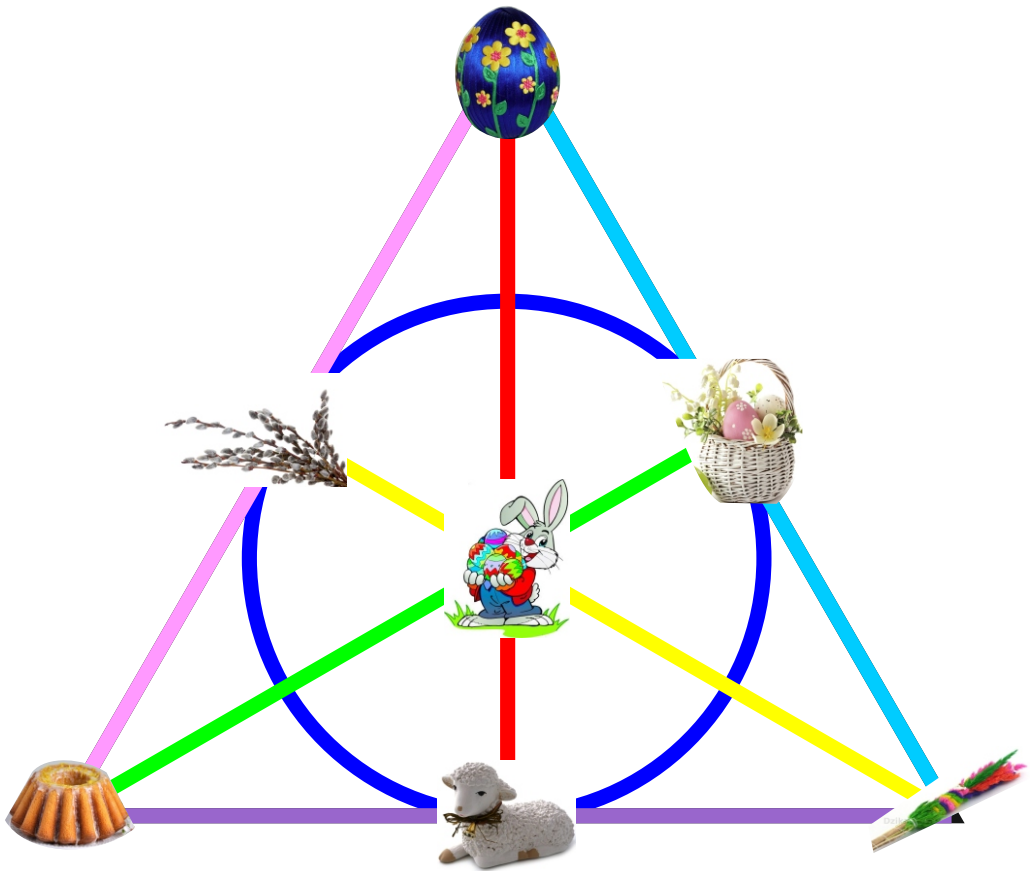
System reglamentacji towarów

Federacja Młodzieży Walczącej

Ogólnopolska opozycyjna organizacja młodzieżowa z lat 80. XX w.

084

4. Czy za talią Dobble kryje się jakieś twierdzenie?



PŁASZCZYZNA FANA

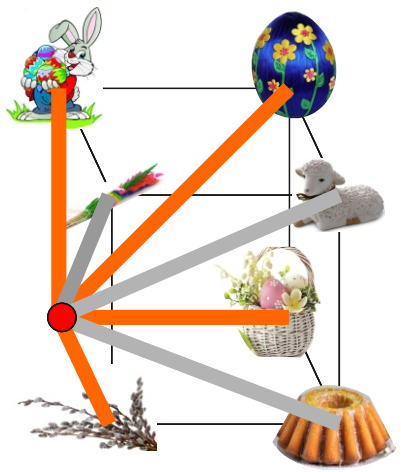
Definicja Aksjomatyczna Przestrzeni Rzutowej:

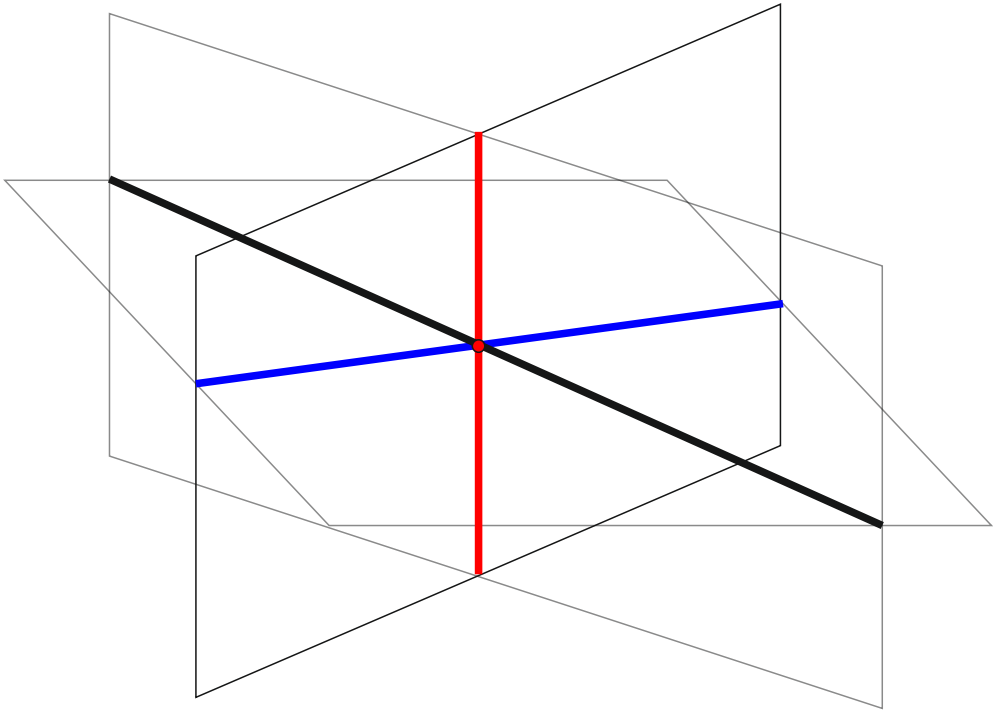
Płaszczyzną rzutową jest każdy obiekt złożony
z punktów i prostych spełniających następujące trzy aksjomaty:

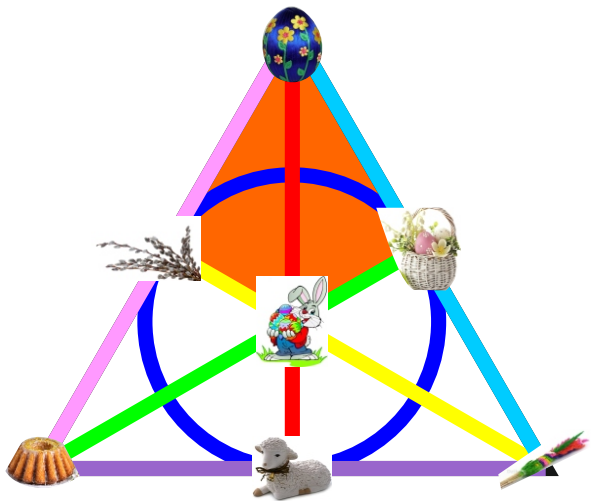
A1 Przez każde dwa punkty przechodzi prosta.

A2 Każde dwie rożne proste mają dokładnie jeden wspólny punkt.

A3 Istnieje czworokąt.







Twierdzenie. Dla każdej płaszczyzny rzutowej istnieje takie k (rząd płaszczyzny rzutowej), że

- płaszczyzna rzutowa zawiera dokładnie $k^2 + k + 1$ punktów;
- płaszczyzna rzutowa zawiera dokładnie $k^2 + k + 1$ prostych;
- każda prosta zawiera dokładnie $k + 1$ punktów;
- przez każdy punkt przechodzi $k + 1$ prostych.

Twierdzenie. Istnieją płaszczyzny rzutowe dla k będących potęgą liczby pierwszej (tzn. $k = p^t$ dla pewnej liczby pierwszej p i liczby naturalnej t).

Twierdzenie. Dla każdej płaszczyzny rzutowej istnieje takie k (rząd płaszczyzny rzutowej), że

- płaszczyzna rzutowa zawiera dokładnie $k^2 + k + 1$ punktów;
- płaszczyzna rzutowa zawiera dokładnie $k^2 + k + 1$ prostych;
- każda prosta zawiera dokładnie $k + 1$ punktów;
- przez każdy punkt przechodzi $k + 1$ prostych.

Twierdzenie. Istnieją płaszczyzny rzutowe dla k będących potęgą liczby pierwszej (tzn. $k = p^t$ dla pewnej liczby pierwszej p i liczby naturalnej t).

UWAGA1: To twierdzenie wynika z istnienia ciał skończonych dla takich k.
(+ konstrukcja prezentowana na tym wykładzie)

UWAGA2: Dla $k \geqslant 9$ istnieją inne niż te prezentowane na tym wykładzie przykłady przestrzeni rzutowych.

UWAGA3: Dla $k = 10$ nie ma odpowiadającej k przestrzeni rzutowej.

UWAGA4: Dla $k = 12$?

Dla zainteresowanych dalszym zgłębianiem tajników dyskretnych płaszczyzn rzutowych w kontekście gier kacianych:

- Mariusz Skałba, Naprawdę ciekawa gra, Delta, kwiecień 2014;
- Marek Kordos, Geometria rzutowa jako panaceum
- W. Lipski, W. Marek, Analiza kombinatoryczna, PWN, Warszawa 1986 (rozdział 1.12)