ALGORYTMY TEORII GRAFÓW (AGR 320). CZĘŚĆ V.

SEMESTR ZIMOWY 2003/2004

.

5. OBCHODY EULERA.

5.1. Obchody Eulera.

Szlak, który zawiera każdą krawędź grafu G jest nazywany *szlakiem Eulera* grafu G.

Obchód grafu G to skończony, domknięty spacer przechodzący przez każdą krawędź G przynajmniej jeden raz.

Obchód Eulera jest obchodem zawierającym każdą krawędź grafu G dokładnie jeden raz (jest to po prostu domknięty szlak Eulera).

Graf nazywamy *eulerowskim* (grafem Eulera) jeżeli zawiera obchód Eulera.

Graf nazywamy *półeulerowskim* jeżeli zawiera szlak Eulera.

Twierdzenie 5.1. *Niepusty spójny graf jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy nie posiada wierzchołków o nieparzystym stopniu.*

Wniosek 5.1. *Graf spójny ma szlak Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy ma co najwyżej dwa wierzchołki stopnia nieparzystego.*

5.2. Problem Chińskiego Listonosza.

Listonosz odbiera przesyłki z poczty, dostarcza je a następnie wraca na pocztę. Musi oczywiście przejść przez każdą ulicę w swoim rejonie przynajmniej raz. Ze względu na ten warunek pragnie wybrać obchód w taki sposób by jak najmniej spacerować. Powyższy problem znany jest jako ,,problem chińskiego listonosza", od chińskiego matematyka Kuana, który go rozpatrywał (1962). W grafie z wagami definiujemy *wagę* obchodu

$$v_0e_1, v_1e_2, \dots, e_nv_0$$

jako $\sum_{i=1}^{n} w(e_i)$. Oczywiście, problem chińskiego listonosza sprowadza się do znalezienia obchodu o minimalnej wadze w spójnym grafie o nieujemnych wagach. Jeżeli G jest eulerowski, to obchód Eulera jest optymalny, ponieważ jest obchodem przechodzącym przez każdą krawędź dokładnie jeden raz. Problem chińskiego listonosza ma wówczas proste rozwiązanie, ponieważ istnieje prosty algorytm znajdowania obchodu Eulera w eulerowskim grafie.

Algorytm Fleury'ego

- Wybierz dowolny wierzchołek v_0 i podstaw $W_0 = v_0$
- Przypuśćmy, że szlak $W_i = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_i v_i$ został wybrany. Wybierz krawędź e_{i+1} z $E - \{e_1, e_2, \dots , e_i\}$ tak, by
  (i) e_{i+1} była incydentna z v_i
  (ii) e_{i+1} nie była krawędzią cięcia grafu $G_i = G - \{e_1, \dots , e_i\}$ chyba, że nie ma innej alternatywy
- STOP jeżeli krok 2 nie może być wykonany.

Algorytm Fleury'ego konstruuje oczywiście szlak. Co więcej prawdziwe jest twierdzenie:

Twierdzenie 5.2. *Jeżeli G jest grafem eulerowskim to dowolny szlak w G skonstruowany przy pomocy algorytmu Fleury'ego jest obchodem Eulera grafu G.*

Jeżeli graf G nie jest eulerowski, to każdy obchód grafu G, w szczególności optymalny obchód, ,,przechodzi" po niektórych krawędziach więcej niż jeden raz.
Wprowadźmy operację duplikowania krawędzi. O krawędzi e, o wadze $w(e)$, mówimy, że została *zduplikowana*, jeżeli jej końce połączyliśmy nową krawędzią o wadze $w(e)$.

Możemy przeformułować problem Chińskiego Listonosza w następujący sposób: dany jest graf G o nieujemnych wagach na krawędziach:

(I) Znaleźć za pomocą duplikowania krawędzi eulerowski ważony nadgraf G^* grafu G taki, że

$$\sum_{e \in E(G^*) - E(G)} w(e) \quad \text{jest najmniejsza z możliwych}$$

(II) Znaleźć obchód Eulera w G^*.
medskip
Dla rozwiązania (II) mamy dobry algorytm Fleury'ego. Efektywny algorytm rozwiązania (I) podali w 1973 Edmonds i Johnson.

Niech V^- będzie zbiorem wierzchołków stopnia nieparzystego grafu G, a M zbiorem spacerów grafu G, które kojarzą w pary wierzchołki z V^- i ewentualnie cykli na wierzchołkach stopnia parzystego. Zauważmy, że mamy zawsze parzystą ilość wierzchołków stopnia nieparzystego i

$$|M| = \frac{1}{2}|V^-| + \# \text{ cykli}.$$

Oznaczmy przez graf $G^+(M)$ multigraf (graf z krawędziami wielokrotnymi) otrzymany z G poprzez duplikację krawędzi spacerów i cykli z M, a dokładniej zastąpienie każdej krawędzi grafu G wiązką $k+1$ krawędzi o takiej samej wadze, jeżeli krawędź ta została wykorzystana k razy w spacerach i cyklach z M (0 jeżeli nie była ona wykorzystana). Łatwo pokazać, że

Twierdzenie 5.3. *Dla dowolnego obchodu grafu G istnieje zbiór M spacerów grafu G kojarzących wierzchołki stopnia nieparzystego, i ewentualnie cykli na wierzchołkach stopnia parzystego, taki że graf $G^+(M)$ zawiera obchód eulerowski odpowiadający temu wyjściowemu obchodowi. Odpowiedniość ta polega na tym, że jeżeli wyjściowy obchód przechodził przez krawędź l razy, to w grafie $G^+(M)$ w miejscu tej krawędzi istnieje wiązka l krawędzi. Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne.*

Z powyższego twierdzenia wynika między innymi fakt, że dla optymalnego obchodu grafu G istnieje zbiór ścieżek M kojarzących wierzchołki stopnia nieparzystego w pary, takich że suma wag krawędzi tych ścieżek jest minimalna i obchód Eulera grafu $G^+(M)$ jest rozwiązaniem problemu chińskiego listonosza. W szczególnym przypadku, gdy graf G ma dokładnie dwa wierzchołki u i v stopnia nieparzystego rozwiązanie (I) sprowadza się do znalezienia (u, v)-ścieżki o minimalnej wadze i duplikacji jej krawędzi.

Algorytm rozwiązujący problem chińskiego listonosza

Krok 1: Korzystając z algorytmu znajdowania najkrótszych ścieżek wyznaczamy macierz $\mathbf{A}_{|V^-|\times|V^-|}$, gdzie A_{ij} jest wagą najkrótszej ścieżki z v_i do v_j, $\quad v_i, v_j \in V^-$;

Krok 2: Na podstawie macierzy $\mathbf{A}$ znajdujemy skojarzenie ścieżkowe M, zbiór ścieżek kojarzących w pary wierzchołki z V^-, takich że suma wag krawędzi tych ścieżek jest minimalna (zauważmy, że w kroku tym szukamy optymalnego skojarzenia w grafie na zbiorze wierzchołków V^- o macierzy wag $\mathbf{A}$);

Krok 3: Duplikujemy krawędzie z M. Stosujemy algorytm Fleury'ego dla otrzymanego w ten sposób grafu $G^+(M)$.

Zadanie.

Znaleźć optymalny obchód - rozwiązanie problemu chińskiego listonosza, dla grafu danego macierzą wag:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty \\ 5 & \infty & 6 & \infty & \infty & 5 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & 6 & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty \\ \infty & \infty & 6 & \infty & 4 & \infty & \infty & 10 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty & 4 \\ 6 & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty \\ \infty & 6 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & 18 & \infty \\ \infty & \infty & 6 & 10 & \infty & \infty & 18 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & 7 & 4 & \infty & \infty & 9 & \infty \end{bmatrix}$$