Elementy logiki

Kwantyfikatory

Wojciech Buszkowski

Zakład Teorii Obliczeń
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza

7. Funkcje zdaniowe i kwantyfikatory

Rozważmy proste formuły matematyczne:

$\forall_x (x > 0 \Rightarrow x + 1 > 0)$, $\exists_x (x^2 = 2x)$

W tych formułach występują kwantyfikatory:

$\forall$ - kwantyfikator ogólny (generalny, uniwersalny)

$\exists$ - kwantyfikator szczegółowy (egzystencjalny, istnienia)

Inne symbole kwantyfikatorów: $\bigwedge$ (ogólny), $\bigvee$ (szczegółowy)

Kwantyfikator występuje zawsze w połaczeniu ze zmienną: $\forall_x$, $\exists_x$. Jest to *kwantyfikacja*, ale można też nazywać ten złożony symbol kwantyfikatorem.

$\forall_x$ czytamy: dla każdego x, $\exists_x$ czytamy: istnieje x (takie, że)

Np. $\exists_x (x^2 = 2x)$ czytamy: istnieje x takie, że $x^2 = 2x$.

Funkcja zdaniowa (lub: forma zdaniowa) jest to wyrażenie, zawierające zmienne, które staje się zdaniem, gdy za zmienne podstawimy wyrażenia o ustalonym znaczeniu (stałe). W matematyce funkcję zdaniową nazywamy też *warunkiem*.

Np. $x > 0 \Rightarrow x + 1 > 0$ stanie się zdaniem prawdziwym, gdy za x podstawimy nazwę dowolnej liczby rzeczywistej.

$2 > 0 \Rightarrow 2 + 1 > 0$, $-5 > 0 \Rightarrow -5 + 1 > 0$

$x^2 = 2x$ stanie się zdaniem prawdziwym, gdy za x podstawimy 0 albo 2, a zdaniem fałszywym, gdy podstawimy nazwę innej liczby.

Każda zmienna reprezentuje obiekty określonego rodzaju (typu). W powyższych przykładach, zmienna x reprezentowała liczby rzeczywiste, ale w $X \subset Y$ i $x \in X$ zmienne X, Y reprezentują zbiory.

Zbiór wszystkich obiektów, reprezentowanych przez zmienną, nazywamy *zakresem* tej zmiennej.

Za zmienne danego typu należy podstawiać nazwy obiektów tego samego typu, np. za zmienne reprezentujące liczby nazwy liczb, a za zmienne reprezentujące zbiory nazwy zbiorów.

Zdanie lub funkcję zdaniową napisaną całkowicie symbolicznie nazywamy formułą (zdaniową).

W powyższych przykładach występowały *formuły atomowe* $x > 0$, $x + 1 > 0$, $x^2 = 2x$, $X \subset Y$, $x \in X$, które nie zawierają spójników logicznych, ani kwantyfikatorów.

Formuły atomowe składają się z *symbolu predykatu* zastosowanego do argumentów.

W logice *predykatem* nazywamy stosunek (relację), np. równości, mniejszości, równoległości (prostych), zawierania (zbiorów), należenia (elementu do zbioru). Rozważa się też relacje jednoargumentowe i wieloargumentowe, np. “... jest liczbą parzystą”, “... jest dzieckiem ... i ....”.

Wyrażenia $x + 1$, x^2, $2x$, czyli $2 \cdot x$, występujące w formułach atomowych jako argumenty symbolu predykatu, są *funkcjami nazwowymi*. Stają się nazwami konkretnych obiektów, gdy za zmienne podstawimy nazwy obiektów, np. $2 + 1$ jest złożoną nazwą liczby 3, 2^2 liczby 4, $2 \cdot 3$ liczby 6.

Do funkcji nazwowych zaliczamy też zmienne, reprezentujące elementy pewnej dziedziny, a także stałe nazwy tych elementów, np. 0, 1, π. Złożone funkcje nazwowe tworzymy za pomocą symboli działań, np. $+$, $\cdot$, ^{2}.

W teorii mnogości zbiory traktujemy jako elementy klasy wszystkich zbiorów, a więc funkcjami nazwowymi są np. X, Y, $X \cup Y$, $X \cap Y$, a także wyrażenia stałe, np. $\emptyset$, $\mathbb{R}$ (symbol dla zbioru liczb rzeczywistych).

W logice funkcja nazwowa napisana całkowicie symbolicznie jest nazywana *termem*.

Ogólna postać formuły atomowej: $P(t_1, \ldots, t_n)$, gdzie P jest symbolem predykatu $n-$argumentowego, a każde t_i jest termem.

Symbole predykatów dwuargumentowych piszemy zwykle pomiędzy argumentami (notacja infiksowa), np. $x = y$ zamiast $= (x, y)$. Symbole predykatów jednoargumentowych i wieloargumentowych piszemy przed argumentami (notacja prefiksowa), np. $P(x)$, $R(x, y, z)$.

Formuły złożone są zbudowane z formuł atomowych za pomocą spójników logicznych i kwantyfikatorów.

Literami φ, ψ, χ oznaczamy dowolne formuły.

Kwantyfikatory wiążą zmienne. W formułach postaci $\forall_x \varphi$ i $\exists_x \varphi$ każde wystąpienie zmiennej x jest *związane*.

Zmienną, występującą w danej formule, lecz nie związaną kwantyfikatorem, nazywamy *wolną* w tej formule.

Przykład. W formule $x > 0 \Rightarrow \exists_y (y > 0)$ zmienna x jest wolna, a zmienna y związana.

W formule $\forall_x (x > 0 \Rightarrow \exists_y (y > 0 \wedge x > y))$ obie zmienne są związane. Formułę bez zmiennych wolnych nazywamy *zdaniem* (albo: *formułą domkniętą*).

Wartość logiczna formuły na ogół zależy od wartości zmiennych wolnych, lecz nie zależy od wartości zmiennych związanych.

Przykłady. Wartość logiczna formuły $x < y$ w zbiorze liczb rzeczywistych zależy od wartości zmiennych x, y (obie są wolne).

Wartość logiczna formuły $\exists_x (x < y)$ w zbiorze nieujemnych liczb całkowitych zależy od wartości zmiennej wolnej y: formuła jest prawdziwa dla $y \geq 1$, lecz fałszywa dla $y = 0$. Zmiennej x, która jest związana, nie nadajemy z góry żadnej określonej wartości.

Zjawisko wiązania zmiennych nie występuje w rachunku zdań. W matematyce jednak często spotykamy operatory, wiążące zmienne.

Przykład. W wyrażeniu $\sum_{k=1}^{k=3}(k+m)$ zmienna k jest związana, a zmienna m jest wolna. Wartość tego wyrażenia zależy od wartości m, lecz nie zależy od wartości k. Faktycznie, w poniższej prawdziwej równości k nie występuje po prawej stronie.

$$\sum_{k=1}^{k=3}(k+m) = (1+m) + (2+m) + (3+m)$$

Inny przykład: $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ - zmienna x jest związana.

Dowolną formułę możemy oznaczyć przez $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (zamiast φ można użyć ψ, χ itp.).

Wtedy $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ oznacza wynik podstawienia termu t_i za zmienną x_i dla $i = 1, \ldots, n$ w $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Bardziej precyzyjne jest oznaczenie $\varphi[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]$, podobnie jak w rachunku zdań, ale będziemy stosować popularne oznaczenie, wprowadzone powyżej.

Kwantyfikator, podobnie jak negacja, jest operatorem działającym na jedną formułę (argument kwantyfikatora). Przyjmujemy, że ma tę samą siłę wiązania, co negacja (czyli największą).

Np. $\forall_x P(x) \Rightarrow P(a)$ rozumiemy jako $(\forall_x P(x)) \Rightarrow P(a)$. Gdy chcemy, żeby argumentem kwantyfikacji była cała implikacja, musimy napisać $\forall_x (P(x) \Rightarrow P(a))$

W matematyce często stosujemy kwantyfikatory, w których zakres zmiennej podlegającej kwantyfikacji jest ograniczony pewnym warunkiem, np. $\forall_{x \in A}$, $\exists_{\delta > 0}$ (kwantyfikatory ograniczone). Ogólnie:

$\forall_{\varphi(x)} \psi(x)$, czytamy: dla każdego x, spełniającego $\varphi(x)$, $\psi(x)$

$\exists_{\varphi(x)} \psi(x)$, czytamy: istnieje x, spełniające $\varphi(x)$ i takie, że $\psi(x)$

Kwantyfikatory ograniczone można zawsze zastąpić kwantyfikatorami bez ograniczeń, stosując prawa eliminacji kwantyfikatorów ograniczonych.

$\forall_{\varphi(x)} \psi(x) \Leftrightarrow \forall_x (\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))$

$\exists_{\varphi(x)} \psi(x) \Leftrightarrow \exists_x (\varphi(x) \wedge \psi(x))$

Przykład. Formuła $\forall_{x>0} \exists_{y>0} (x > y)$ jest logicznie równoważna (na mocy tych praw) formule:

$\forall_x (x > 0 \Rightarrow \exists_y (y > 0 \wedge x > y))$.

Przykład. Arystoteles (384-322 p.n.e.) opisał związki logiczne między tzw. zdaniami kategorycznymi.

Zdania ogólne: każde S jest P, żadne S nie jest P

Zdania szczegółowe: niektóre S są P, niektóre S nie są P

W tych zdaniach litery S, P reprezentują terminy (nazwy) ogólne, np. student, człowiek, koń, zielony, dziki.

Przykłady: każdy student jest człowiekiem, żaden człowiek nie jest koniem, niektóre konie (nie) są dzikie.

We współczesnej logice interpretujemy te zdania jako formuły z kwantyfikatorami.

każde S jest P: $\forall_{S(x)} P(x)$, czyli $\forall_x (S(x) \Rightarrow P(x))$

żadne S nie jest P: $\forall_{S(x)} \neg P(x)$, czyli $\forall_x (S(x) \Rightarrow \neg P(x))$

niektóre S są P: $\exists_{S(x)} P(x)$, czyli $\exists_x (S(x) \wedge P(x))$

niektóre S nie są P: $\exists_{S(x)} \neg P(x)$, czyli $\exists_x (S(x) \wedge \neg P(x))$

Jeżeli zakres zmiennej x jest zbiorem skończonym, którego elementami są obiekty $a_1, a_2, \ldots, a_n$, to kwantyfikatory można zastąpić wieloczłonowymi koniunkcjami i alternatywami.

$\forall_x \varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(a_1) \wedge \varphi(a_2) \wedge \cdots \wedge \varphi(a_n)$

$\exists_x \varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(a_1) \vee \varphi(a_2) \vee \cdots \vee \varphi(a_n)$

W przypadku, gdy zakres zmiennej x jest zbiorem nieskończonym, po prawej stronie takich praw występowałyby nieskończone koniunkcje i alternatywy. W logice nie dopuszczamy formuł nieskończonej długości.

Kwantyfikator ogólny pozwala wyrazić dowolną (także nieskończoną) koniunkcję $\varphi(a_1) \wedge \varphi(a_2) \wedge \varphi(a_3) \wedge \cdots$, gdzie $a_1, a_2, a_3, \ldots$ są wszystkimi elementami zakresu zmiennej x, przez skończoną formułę $\forall_x \varphi(x)$. Podobnie kwantyfikator szczegółowy pozwala wyrazić analogiczną alternatywę przez skończoną formułę.

8. Prawa dla kwantyfikatorów

Definicja 10. *Prawem logiki* nazywamy formułę, która jest prawdziwa w każdej dopuszczalnej interpretacji tej formuły, dla wszystkich możliwych wartości zmiennych wolnych.

Dopuszczalna interpretacja polega na:

- ustaleniu zakresów wszystkich zmiennych występujących w formule,

- przypisaniu konkretnych predykatów symbolom predykatów i konkretnych działań symbolom działań,

- przypisaniu konkretnych obiektów stałym, oznaczającym obiekty.

Ponieważ prawo jest prawdziwe w każdej takiej interpretacji, więc jego prawdziwość jest konsekwencją jego struktury logicznej. Spójniki logiczne i kwantyfikatory mają to samo znaczenie w każdej interpretacji.

Przykład. Rozważmy formułę:

$\forall_x (P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge P(a) \Rightarrow Q(a)$

Ustalamy zakres zmiennej x (dziedzinę) jako zbiór wszystkich zwierząt. Nadajemy znaczenie symbolom P, Q.

$P(x)$: x jest owczarkiem, $Q(x)$: x jest psem, a: Szarik

Wtedy nasza formuła wyraża zdanie: jeżeli każdy owczarek jest psem i Szarik jest owczarkiem, to Szarik jest psem.

To zdanie jest prawdziwe. Tak jest w dowolnej interpretacji, w której dziedziną jest jakikolwiek niepusty zbiór, P, Q oznaczają jakieś własności elementów tej dziedziny, i a oznacza jakiś ustalony element.

Jeżeli każde P jest Q i a jest P, to a jest Q. To jest zawsze prawda.

Zatem nasza formuła jest prawem logiki.

Lista podstawowych praw

Prawa podstawiania

$\forall_x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(t)$

$\varphi(t) \Rightarrow \exists_x \varphi(x)$

Tu x jest dowolną zmienną, $\varphi(x)$ dowolną formułą, w której x jest wolne, a t dowolnym termem (tego samego typu, co x).

Jeżeli w $\varphi(x)$ występują kwantyfikatory, a w t zmienne, to wymagamy, żeby żadne wolne wystąpienie x w $\varphi(x)$ nie znajdowało się w zasięgu kwantyfikacji $\forall_y$ lub $\exists_y$, gdzie y występuje w t.

$\forall_x \exists_y (x < y) \Rightarrow \exists_y (3 < y)$ dobrze. $\forall_x \exists_y (x < y) \Rightarrow \exists_y (z < y)$ dobrze.

$\forall_x \exists_y (x < y) \Rightarrow \exists_y (y < y)$ źle. Nastąpiła *kolizja zmiennych przy podstawianiu*.

Szczególne przypadki tych praw: $\forall_x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x)$, $\varphi(x) \Rightarrow \exists_x \varphi(x)$.

Prawa De Morgana dla kwantyfikatorów

$\neg\forall_x \varphi(x) \Leftrightarrow \exists_x \neg\varphi(x)$

$\neg\exists_x \varphi(x) \Leftrightarrow \forall_x \neg\varphi(x)$

Jako konsekwencje otrzymujemy prawa definiowania jednego kwantyfikatora przez drugi.

$\forall_x \varphi(x) \Leftrightarrow \neg\exists_x \neg\varphi(x)$

$\exists_x \varphi(x) \Leftrightarrow \neg\forall_x \neg\varphi(x)$

Te prawa wynikają logicznie z praw De Morgana dla kwantyfikatorów na podstawie reguł logicznych KRZ.

Z $p \Leftrightarrow q$ wynika logicznie $\neg p \Leftrightarrow \neg q$. Ponadto $\neg\neg p$ jest logicznie równoważne p.

Prawa rozdzielności kwantyfikatorów

$\forall_x(\varphi(x) \land \psi(x)) \Leftrightarrow \forall_x\varphi(x) \land \forall_x\psi(x)$

$\exists_x(\varphi(x) \lor \psi(x)) \Leftrightarrow \exists_x\varphi(x) \lor \exists_x\psi(x)$

Kwantyfikator ogólny jest rozdzielny względem koniunkcji, a kwantyfikator szczegółowy względem alternatywy.

Niepełne prawa rozdzielności

$\forall_x\varphi(x) \lor \forall_x\psi(x) \Rightarrow \forall_x(\varphi(x) \lor \psi(x))$

$\exists_x(\varphi(x) \land \psi(x)) \Rightarrow \exists_x\varphi(x) \land \exists_x\psi(x)$

Implikacje odwrotne nie zawsze są prawami.

$\forall_x(x = 0 \lor x \neq 0) \Rightarrow \forall_x(x = 0) \lor \forall_x(x \neq 0)$

$\exists_x(x = 0) \land \exists_x(x \neq 0) \Rightarrow \exists_x(x = 0 \land x \neq 0)$

Oba zdania są fałszywe w zbiorze liczb całkowitych.

Prawa przestawiania kwantyfikatorów

$\forall_x \forall_y \varphi(x, y) \Leftrightarrow \forall_y \forall_x \varphi(x, y)$

$\exists_x \exists_y \varphi(x, y) \Leftrightarrow \exists_y \exists_x \varphi(x, y)$

Sąsiednie kwantyfikatory ogólne można przestawiać; podobnie szczegółowe.

Niepełne prawo przestawiania

$\exists_x \forall_y \varphi(x, y) \Rightarrow \forall_y \exists_x \varphi(x, y)$

Implikacja odwrotna nie zawsze jest prawem.

$\forall_y \exists_x (x < y) \Rightarrow \exists_x \forall_y (x < y)$

Zdanie jest fałszywe w zbiorze liczb całkowitych.

Prawa zamiany zmiennej związanej

$\forall_x \varphi(x) \Leftrightarrow \forall_y \varphi(y)$

$\exists_x \varphi(x) \Leftrightarrow \exists_y \varphi(y)$

Warunki ograniczające:

(w1) x i y są różnymi zmiennymi (tego samego typu)

(w2) y nie jest wolne w $\varphi(x)$,

(w3) nie ma kolizji zmiennych przy podstawianiu y za x w $\varphi(x)$.

Te warunki są na pewno spełnione, gdy y jest nową zmienną, tzn. nie występuje w $\varphi(x)$.

Przykład. $\exists_x(x < y) \Leftrightarrow \exists_z(z < y)$ jest prawem logiki (z nie występuje w $x < y$). $\exists_x(x < y) \Leftrightarrow \exists_y(y < y)$ jest fałszem w zbiorze liczb całkowitych dla każdej wartości y, więc nie jest prawem. Warunek (w2) nie jest spełniony.

Prawa dołączania kwantyfikatorów do implikacji

$\forall_x(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)) \Rightarrow (\forall_x\varphi(x) \Rightarrow \forall_x\psi(x))$

$\forall_x(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)) \Rightarrow (\exists_x\varphi(x) \Rightarrow \exists_x\psi(x))$

Prawa ekstensjonalności dla kwantyfikatorów

$\forall_x(\varphi(x) \Leftrightarrow \psi(x)) \Rightarrow (\forall_x\varphi(x) \Leftrightarrow \forall_x\psi(x))$

$\forall_x(\varphi(x) \Leftrightarrow \psi(x)) \Rightarrow (\exists_x\varphi(x) \Leftrightarrow \exists_x\psi(x))$

Te prawa są podobne do praw ekstensjonalności w rachunku zdań.

$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Leftrightarrow \neg q)$

$(p_1 \Leftrightarrow q_1) \wedge (p_2 \Leftrightarrow q_2) \Rightarrow (p_1 \wedge p_2 \Leftrightarrow q_1 \wedge q_2)$ (podobnie dla $\vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ zamiast $\wedge$ w następniku tej implikacji)

Te prawa rachunku zdań wyrażają ekstensjonalność spójników logicznych. Podobny sens mają prawa ekstensjonalności dla kwantyfikatorów.

Prawa zbędnych kwantyfikatorów

Dla formuły φ, w której zmienna x nie jest wolna, mamy następujące prawa.

$\forall_x \varphi \Leftrightarrow \varphi$

$\exists_x \varphi \Leftrightarrow \varphi$

Prawa wyłączania kwantyfikatorów przed nawias

Dla formuły ψ, w której zmienna x nie jest wolna, mamy następujące prawa.

$\forall_x \varphi(x) \wedge \psi \Leftrightarrow \forall_x(\varphi(x) \wedge \psi)$ $\forall_x \varphi(x) \vee \psi \Leftrightarrow \forall_x(\varphi(x) \vee \psi)$

$\exists_x \varphi(x) \wedge \psi \Leftrightarrow \exists_x(\varphi(x) \wedge \psi)$ $\exists_x \varphi(x) \vee \psi \Leftrightarrow \exists_x(\varphi(x) \vee \psi)$

$(\forall_x \varphi(x) \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow \exists_x(\varphi(x) \Rightarrow \psi)$ $(\exists_x \varphi(x) \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow \forall_x(\varphi(x) \Rightarrow \psi)$

$(\psi \Rightarrow \forall_x \varphi(x)) \Leftrightarrow \forall_x(\psi \Rightarrow \varphi(x))$ $(\psi \Rightarrow \exists_x \varphi(x)) \Leftrightarrow \exists_x(\psi \Rightarrow \varphi(x))$

9. Logiczna równoważność i wynikanie logiczne

Definicja 11. Mówimy, że formuła φ jest *logicznie równoważna* formule ψ, jeżeli formuła $\varphi \Leftrightarrow \psi$ jest prawem logiki.

Formuły logicznie równoważne mają równe wartości logiczne w każdej interpretacji, dla dowolnych wartości zmiennych wolnych.

Prawdziwe są dwie podstawowe zasady.

(Z1) *Jeżeli dwie formuły są logicznie równoważne, to jedna jest prawem logiki wtedy i tylko wtedy, gdy druga jest prawem logiki.*

(Z2) *Jeżeli w danej formule zastąpimy jej podformułę (tj. formułę wchodzącą w skład danej formuły) logicznym równoważnikiem tej podformuły, to otrzymamy formułę logicznie równoważną danej formule.*

Stosując te zasady, możemy wyprowadzać prawa logiki z innych praw logiki metodą przekształceń równoważnościowych.

Wyprowadzimy prawo $\forall_x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge P(a) \Rightarrow Q(a)$, które napisaliśmy w rozdziale 8.

$\forall_x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (P(a) \Rightarrow Q(a))$ (prawo podstawiania)

$\forall_x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge P(a) \Rightarrow Q(a)$; na mocy prawa
$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [p \wedge q \Rightarrow r]$

Wykażemy, że zdanie ‘niektóre S nie są P’ jest logicznie równoważne negacji zdania ‘każde S jest P’.

$\neg\forall_x(S(x) \Rightarrow P(x))$, czyli ‘nieprawda, że każde S jest P’

$\exists_x\neg(S(x) \Rightarrow P(x))$; na mocy prawa De Morgana dla kwantyfikatorów

$\exists_x(S(x) \wedge \neg P(x))$, czyli ‘niektóre S nie są P’; na mocy prawa
$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

W ostatnim przykładzie wykazaliśmy, że formuła

$\neg\forall_x(S(x) \Rightarrow P(x)) \Leftrightarrow \exists_x(S(x) \wedge \neg P(x))$

jest prawem logiki. To prawo można napisać za pomocą kwantyfikatorów ograniczonych.

$\neg\forall_{S(x)}P(x) \Leftrightarrow \exists_{S(x)}\neg P(x)$

W podobny sposób wyprowadzimy ogólniejsze prawa:

$\neg\forall_{\varphi(x)}\psi(x) \Leftrightarrow \exists_{\varphi(x)}\neg\psi(x)$

$\neg\exists_{\varphi(x)}\psi(x) \Leftrightarrow \forall_{\varphi(x)}\neg\psi(x)$

Są to *prawa De Morgana dla kwantyfikatorów ograniczonych*.

Przykład. $\neg\exists_{x\in\mathbb{Q}}(x^2 = 2) \Leftrightarrow \forall_{x\in\mathbb{Q}}(x^2 \neq 2)$.

$\mathbb{Q}$ jest standardowym oznaczeniem zbioru liczb wymiernych (ang. quotient, iloraz). Formuła $x^2 \neq 2$ jest skrótem dla $\neg(x^2 = 2)$.

Wszystkie prawa wypisane w rozdziale 8 zachowują ważność dla kwantyfikatorów ograniczonych.

W prawach przestawiania kwantyfikatorów ograniczonych warunki ograniczające dla x i y mogą być różne.

$\forall_{\varphi(x)} \forall_{\psi(y)} \chi(x, y) \Leftrightarrow \forall_{\psi(y)} \forall_{\varphi(x)} \chi(x, y)$ (podobnie dla $\exists$)

Ograniczenie: x nie jest wolne w $\psi(y)$ i y nie jest wolne w $\varphi(x)$.

W niektórych prawach wyłączania kwantyfikatorów ograniczonych przed nawias trzeba założyć, że istnieje obiekt spełniający warunek ograniczający.

$\forall_{\chi(x)} \varphi(x) \wedge \psi \Leftrightarrow \forall_{\chi(x)} (\varphi(x) \wedge \psi)$ (podobnie dla $\exists$ i $\vee$)

Jeżeli $\chi(x)$ jest fałszywe dla wszystkich możliwych wartości x, to prawa strona równoważności jest prawdziwa, niezależnie od wartości logicznych $\varphi(x)$ i ψ, ale lewa strona jest fałszywa, gdy ψ jest fałszywe.

Prawa podstawiania przyjmują postać:

$\forall_{\varphi(x)}\psi(x) \Rightarrow (\varphi(t) \Rightarrow \psi(t)),\ \ \varphi(t) \wedge \psi(t) \Rightarrow \exists_{\varphi(x)}\psi(x)$

Ograniczenie: nie ma kolizji zmiennych przy podstawianiu t za x w $\varphi(x)$ i $\psi(x)$.

Te wszystkie prawa można wyprowadzić z praw podstawowych metodą przekształceń równoważnościowych.

Przykład. $\exists_{\chi(x)}(\varphi(x) \vee \psi(x)) \Leftrightarrow \exists_{\chi(x)}\varphi(x) \vee \exists_{\chi(x)}\psi(x)$

$\exists_{\chi(x)}(\varphi(x) \vee \psi(x))$ (lewa strona równoważności)

$\exists_x(\chi(x) \wedge (\varphi(x) \vee \psi(x)))$ (eliminacja kwantyfikatora ogr.)

$\exists_x((\chi(x) \wedge \varphi(x)) \vee (\chi(x) \wedge \psi(x)))$ (rozdzielność $\wedge$ względem $\vee$)

$\exists_x(\chi(x) \wedge \varphi(x)) \vee \exists_x(\chi(x) \wedge \psi(x))$ (rozdzielność $\exists$ względem $\vee$)

$\exists_{\chi(x)}\varphi(x) \vee \exists_{\chi(x)}\psi(x)$ (prawa strona równoważności)

Teraz zakładamy, że w formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ dokładnie zmienne $x_1, \ldots, x_n$ są wolne.

Definicja 12. Mówimy, że formuła $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jest *ogólnie prawdziwa* w danej interpretacji, jeżeli jest prawdziwa w tej interpretacji dla wszystkich możliwych wartości $x_1, \ldots, x_n$.

Fakt 11. *Formuła $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jest ogólnie prawdziwa w danej interpretacji wtedy i tylko wtedy, gdy zdanie $\forall_{x_1} \ldots \forall_{x_n} \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jest prawdziwe w tej interpretacji.*

To zdanie nazywamy *generalizacją* formuły $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Generalizacją zdania φ jest φ. Zdanie jest *ogólnie prawdziwe* w interpretacji, jeżeli jest prawdziwe w tej interpretacji.

Przykład. Zdanie $\forall_x \forall_y (x + y = y + x)$ jest generalizacją formuły $x + y = y + x$. Ponieważ to zdanie jest prawdziwe w $\mathbb{R}$, więc formuła $x + y = y + x$ jest ogólnie prawdziwa w $\mathbb{R}$.

Definicja 13. Mówimy, że formuła φ *wynika logicznie* ze zbioru formuł S, jeżeli φ jest ogólnie prawdziwa w każdej interpretacji, w której wszystkie formuły ze zbioru S są ogólnie prawdziwe.

W odpowiedniku faktu 3.4 prawdziwa jest tylko implikacja.

Jeżeli $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$ jest prawem logiki, to formuła φ wynika logicznie z formuł $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Implikacja odwrotna jest prawdziwa, jeżeli $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ są zdaniami.

Ważny przykład. Formuła $\forall_x \varphi(x)$ wynika logicznie z formuły $\varphi(x)$. Rzeczywiście, jeżeli $\varphi(x)$ jest ogólnie prawdziwe w danej interpretacji, to $\forall_x \varphi(x)$ musi być ogólnie prawdziwe w tej interpretacji.

Formuła $\varphi(x) \Rightarrow \forall_x \varphi(x)$ na ogół nie jest prawem logiki.

$x = 0 \Rightarrow \forall_x (x = 0)$: fałsz w zbiorze liczb rzeczywistych dla $x := 0$.

Fakt 12. Prawdziwe są następujące *warunki konsekwencji*.

(C1) Jeżeli φ należy do S, to φ wynika logicznie z S.

(C2) Jeżeli φ wynika logicznie z S, to wynika logicznie z dowolnego zbioru formuł, zawierającego S.

(C3) Jeżeli każda formuła ze zbioru S_2 wynika logicznie ze zbioru S_1 i φ wynika logicznie z S_2, to φ wynika logicznie z S_1.

Przykład. Wykażemy, że ze zdań $\forall_x(P(x) \Rightarrow Q(x))$, $\forall_x(Q(x) \Rightarrow R(x))$ wynika logicznie zdanie $\forall_x(P(x) \Rightarrow R(x))$.

Na mocy praw podstawiania, z dwóch pierwszych zdań wynikają logicznie formuły $P(x) \Rightarrow Q(x)$ i $Q(x) \Rightarrow R(x)$.

Na mocy prawa sylogizmu hipotetycznego, z tych formuł wynika logicznie $P(x) \Rightarrow R(x)$.

Z tej ostatniej wynika logicznie $\forall_x(P(x) \Rightarrow R(x))$.

Podobnie jak w rachunku zdań, przez logiczną regułę wnioskowania rozumiemy schemat

$$\frac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\psi}$$

taki, że ψ wynika logicznie z $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Wszystkie logiczne reguły wnioskowania KRZ zachowują ważność w logice z kwantyfikatorami, jeżeli za zmienne zdaniowe podstawimy dowolne formuły.

Przykładami takich reguł są:

$$\text{(MP)}\ \frac{\varphi \Rightarrow \psi,\ \varphi}{\psi} \quad \text{(SYL)}\ \frac{\varphi \Rightarrow \psi,\ \psi \Rightarrow \chi}{\varphi \Rightarrow \chi}$$

Ponadto mamy wiele reguł specyficznych dla kwantyfikatorów, np. przy tym samym ograniczeniu, co w prawach podstawiania:

$$\frac{\forall_x \varphi(x)}{\varphi(t)} \quad \frac{\varphi(t)}{\exists_x \varphi(x)}$$

Poprzednie reguły odpowiadają prawom logiki.

W rozumowaniach matematycznych istotną rolę odgrywa *reguła generalizacji*:

$$\text{(GEN)}\ \frac{\varphi(x)}{\forall_x \varphi(x)}$$

Ta reguła nie odpowiada prawu logiki, ale wniosek wynika logicznie z przesłanki w sensie definicji 14 (patrz: ważny przykład).

Inną regułą tego rodzaju jest *reguła podstawiania*:

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(t)}$$

przy tym samym ograniczeniu, co w prawach podstawiania.

Rzeczywiście, z $\varphi(x)$ wynika logicznie $\forall_x \varphi(x)$ na mocy (GEN), a stąd $\varphi(t)$ na mocy prawa podstawiania.

10. Stosunek równości

Stosunek równości jest podstawowym stosunkiem logicznym. Każdy obiekt jest w tym stosunku tylko z samym sobą.

Symbolem stosunku równości jest ‘=’. Formuła $t_1 = t_2$ jest prawdziwa w danej interpretacji dla konkretnych wartości zmiennych występujących w termach t_1, t_2, gdy oba termy mają tę samą wartość.

Np. $x = y$ jest prawdziwa, gdy wartości zmiennych x, y są równe. $x + y = z$ jest prawdziwa w $\mathbb{R}$ dla takich wartości x, y, z, dla których wartość z jest sumą wartości x i y.

Przyjmujemy następujące aksjomaty równości.

Prawo zwrotności równości: $x = x$ (x jest dowolną zmienną)

Prawo zastępowania: $x = y \Rightarrow (\varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(y))$, dla dowolnych zmiennych x, y tego samego typu i dowolnej formuły $\varphi(z)$ (zmienne x, y, z są różne; x, y mogą być wolne w $\varphi(z)$)

Zakładamy, że nie ma kolizji zmiennych przy podstawianiu x i y za z w $\varphi(z)$.

Można wyprowadzić inne ważne prawa.

Prawo symetrii równości: $x = y \Rightarrow y = x$.

1. $x = y \Rightarrow (x = x \Leftrightarrow y = x)$ (prawo zastępowania dla $\varphi(z) : z = x$)
2. $(x = x \Leftrightarrow y = x) \Rightarrow (x = x \Rightarrow y = x)$ (tautologia KRZ)
3. $x = y \Rightarrow (x = x \Rightarrow y = x)$ (SYL 1, 2)
4. $x = x \Rightarrow (x = y \Rightarrow y = x)$ $([p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow r)])$
5. $x = x$ (prawo zwrotności równości)
6. $x = y \Rightarrow y = x$ (MP 4, 5)

Prawo przechodniości równości: $x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$

Prawo zastępowania w termach: $x = y \Rightarrow t(x) = t(y)$ dla dowolnych zmiennych x, y i dowolnego termu $t(z)$, przy czym zmienne x, y, z są różne i x, y mogą występować w $t(z)$

Przykłady. $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$. Tutaj $t(z)$: z^2.

$x = y \Rightarrow x + y = y + y$. Tutaj $t(z)$: $z + y$.

Za pomocą stosunku równości można zdefiniować *kwantyfikacje numeryczne*:

$\exists_x^{\geq n} \varphi(x)$ - istnieje przynajmniej n obiektów x takich, że $\varphi(x)$

$\exists_x^{\geq 1} \varphi(x)$ to po prostu $\exists_x \varphi(x)$.

$\exists_x^{\geq 2} \varphi(x) \Leftrightarrow \exists_x \exists_y (x \neq y \wedge \varphi(x) \wedge \varphi(y))$

$\exists_x^{\geq 3} \varphi(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists_x \exists_y \exists_z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge \varphi(x) \wedge \varphi(y) \wedge \varphi(z))$

$\exists_x^{\leq n} \varphi(x)$ - istnieje najwyżej n obiektów x takich, że $\varphi(x)$

$\exists_x^{\leq n} \varphi(x) \Leftrightarrow \neg \exists_x^{\geq n+1} \varphi(x)$

Oczywiście ‘istnieje dokładnie n ...’ można wyrazić jako koniunkcję ‘istnieje przynajmniej n ... i istnieje najwyżej n ...’.

11. Klasyczny rachunek predykatów

Zauważmy, że - w odróżnieniu od definicji tautologii KRZ - definicja prawa logiki jest nieefektywna, tzn. nie wskazuje żadnego algorytmu sprawdzania, czy dana formuła jest, czy nie jest prawem logiki. Istnieje nieskończenie wiele dopuszczalnych interpretacji formuły. Co więcej, ogólna prawdziwość formuły w jednej interpretacji może być otwartym problemem matematycznym. Dlatego na ogół nie można sprawdzić w skończonej liczbie kroków, czy formuła jest prawdziwa w każdej interpretacji dla wszystkich wartości zmiennych wolnych.

W niektórych przypadkach można stwierdzić, że formuła nie jest prawem, pokazując jej fałszywość w jednej interpretacji. Takie przykłady pojawiły się wcześniej.

Dlatego dla logiki z kwantyfikatorami istotną rolę odgrywa aksjomatyzacja. Można zbudować formalne systemy dedukcyjne, w których wszystkie prawa można wyprowadzić z pewnych podstawowych praw (aksjomatów) za pomocą niewielu reguł dowodzenia. Jest to jednak możliwe tylko dla praw sformułowanych w pewnych ograniczonych językach formalnych.

Klasyczny rachunek predykatów pierwszego rzędu w wersji podstawowej uwzględnia tylko jeden typ zmiennych. Są to tzw. *zmienne indywiduowe*. W dopuszczalnej interpretacji wszystkie zmienne mają ten sam zakres (dziedzinę). Symbole predykatów są interpretowane jako dowolne (lecz ustalone w danej interpretacji) stosunki między elementami tej dziedziny; podobnie symbole działań jako działania w tej dziedzinie, a tzw. stałe indywiduowe jako nazwy pewnych elementów tej dziedziny.

Inne nazwy tej logiki: logika pierwszego rzędu, logika elementarna

Aksjomatami są wszystkie formuły, które powstają z tautologii KRZ w wyniku podstawienia dowolnych formuł tego języka za zmienne zdaniowe. Ponadto przyjmujemy aksjomaty specyficzne dla kwantyfikatorów. Na przykład: prawa podstawiania, prawa zbędnych kwantyfikatorów i prawa dołączania kwantyfikatorów do implikacji. Regułami dowodzenia są (MP) i (GEN).

Dołączając aksjomaty równości, otrzymujemy *logikę pierwszego rzędu z równością*.

Wielosortowa logika pierwszego rzędu: uwzględnia zmienne różnych typów, ale zakresy zmiennych są dowolnymi zbiorami niepustymi.

Logika drugiego rzędu: zawiera zmienne dla predykatów, których zakresem jest zbiór wszystkich możliwych predykatów na zbiorze indywiduów.

Przykładowe prawa: $\forall_x \exists_P P(x)$, $\exists_P \forall_x \neg P(x)$