0.1. Wykresy nierówności i układów nierówności

Teoria

Każdą prostą na płaszczyźnie, niebędącą prostą pionową, można określić za pomocą tak zwanego równania kierunkowego tzn. równania postaci $y = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

1^o. Nierówność $y > ax + b$ określa półpłaszczyznę otwartą, utworzoną przez punkty leżące nad prostą $y = ax + b$.

2^o. Nierówność $y < ax + b$ określa półpłaszczyznę otwartą, utworzoną przez punkty leżące pod prostą $y = ax + b$.

3^o. Nierówność $y \geqslant ax+b$ określa półpłaszczyznę domkniętą, utworzoną przez punkty leżące nad prostą $y = ax + b$ i na tej prostej.

4^o. Nierówność $y \leqslant ax+b$ określa półpłaszczyznę domkniętą, utworzoną przez punkty leżące pod prostą $y = ax + b$ i na tej prostej.

Każdą prostą pionową na płaszczyźnie można określić za pomocą równania postaci $x = a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

1^o. Nierówność $x > a$ określa półpłaszczyznę otwartą utworzoną przez punkty leżące na prawo od prostej $x = a$.

2^o. Nierówność $x < a$ określa półpłaszczyznę otwartą, utworzoną przez punkty leżące na lewo od prostej $x = a$.

3^o. Nierówność $x \geqslant a$ określa półpłaszczyznę domkniętą, utworzoną przez punkty leżące na prawo od prostej $x = a$ i na tej prostej.

4^o. Nierówność $x \leqslant a$ określa półpłaszczyznę domkniętą, utworzoną przez punkty leżące na lewo od prostej $x = a$ i na tej prostej.

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Wówczas:

1^o. Nierówność $y > f(x)$ określa zbiór punktów płaszczyzny, leżących nad wykresem funkcji $y = f(x)$.

2^o. Nierówność $y < f(x)$ określa zbiór punktów płaszczyzny, leżących pod wykresem funkcji $y = f(x)$.

3^o. Nierówność $y \geqslant f(x)$ określa zbiór punktów płaszczyzny, leżących nad wykresem funkcji $y = f(x)$ i na tym wykresie.

4^o. Nierówność $y \leqslant f(x)$ określa zbiór punktów płaszczyzny, leżących pod wykresem funkcji $y = f(x)$ i na tym wykresie.

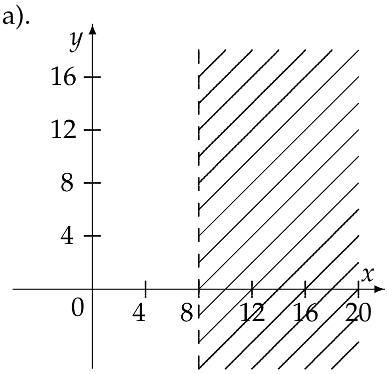
Zadania obowiązkowe

Zadanie 1. Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór określony przez daną nierówność:

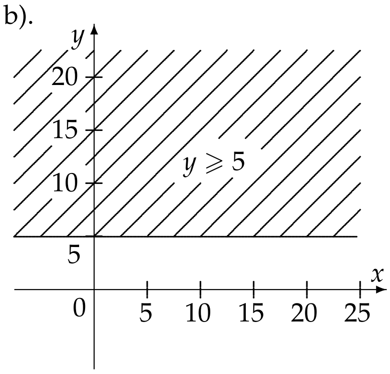
a) $x > 8$;   b) $y \geqslant 5$.

Szkic rozwiązania.

Ad a).



Ad b).

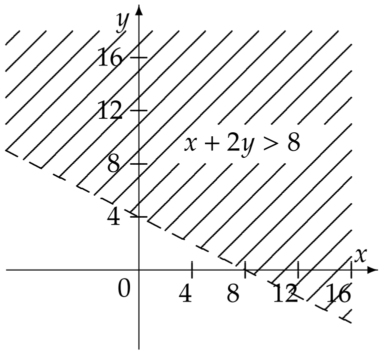


Zadanie 2. Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór określony przez daną nierówność:

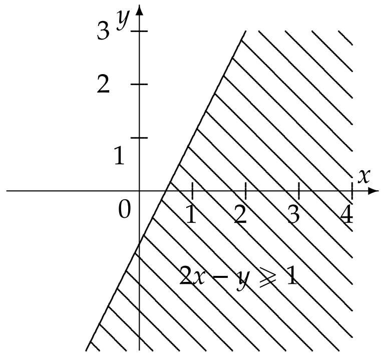
a) $x + 2y > 8$;   b) $2x - y \geqslant 1$.

Szkic rozwiązania.

Ad a). Daną nierówność zapisujemy w postaci $y > 4 - x/2$. Zatem nierówność ta określa półpłaszczyznę otwartą leżącą nad prostą $x + 2y = 8$.



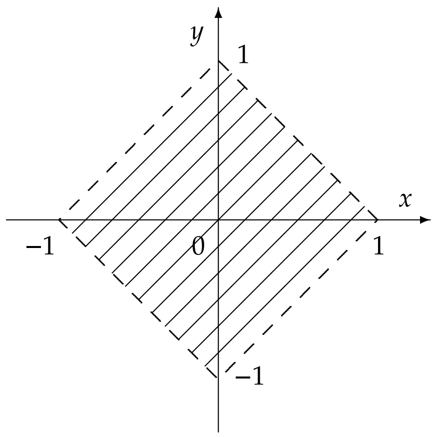
Ad b). Tu danej nierówności nadajemy postać $y \leqslant 2x - 1$. Zatem nierówność ta określa półpłaszczyznę leżącą pod prostą $2x + y = 1$ włącznie z tą prostą.



Zadanie 3. Wskazać na płaszczyźnie Oxy zbiór punktów (x, y), których współrzędne x i y spełniają warunek $|x| + |y| < 1$.

Szkic rozwiązania. Rozpatrujemy cztery następujące przypadki:

Przypadek 1^o. $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. W przypadku tym dany warunek jest równoważny z nierównością $x + y < 1$, czyli $y < -x + 1$. Spełniają ją wszystkie te punkty I-szej ćwiartki, które leżą pod prostą $y = -x + 1$.
Przypadek 2^o. $x < 0$, $y > 0$. Mamy tu $-x + y < 1$, czyli $y < x + 1$. Żądane warunki spełniają te punkty II-giej ćwiartki, które leżą pod prostą $y = x + 1$.
Przypadek 3^o. $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$. Warunek z zadania przyjmuje w tym przypadku postać $-x - y < 1$ czyli $y > -x - 1$. Odpowiednie warunki są spełnione przez te punkty III-ciej ćwiartki, które leżą nad prostą $y = -x-1$.
Przypadek 4^o. $x > 0$, $y < 0$. Tym razem uzyskujemy nierówność $x - y < 1$, czyli $y > x - 1$ oraz zbiór tych punktów IV-tej ćwiartki, które leżą nad prostą $y = x-1$.



Uwaga. Zbiór określony w tym zadaniu jest jednostkową kulą otwartą w przestrzeni metrycznej $\mathbb{R}^2$ *z tzw. metryką taksówkową.*

Zadania domowe

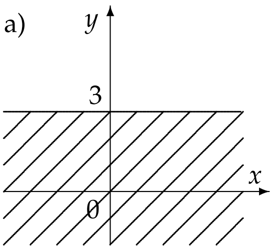
Zadanie 4. Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór punktów (x, y) określony przez dany warunek:

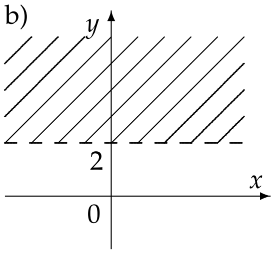
a) $y \leqslant 3$; b) $y > 2$; c) $x < 4$;

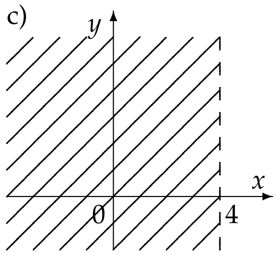
d) $x \geqslant 1$; e) $y > x$; f) $x + y \geqslant 1$;

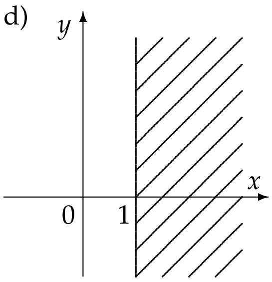
g) $x + 2y \geqslant 6$; h) $2x + y \geqslant 6$; i) $4x + 5y < 0$.

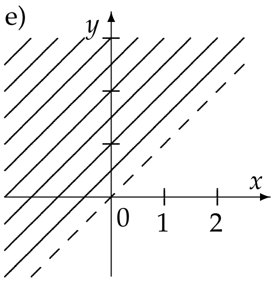
Odpowiedź:

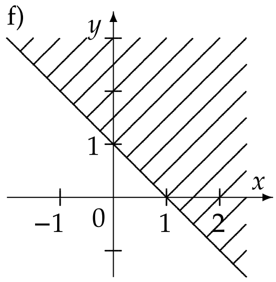
a)


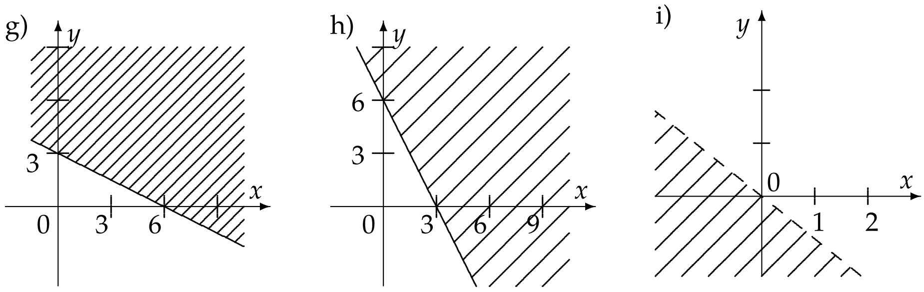
b)


c)


d)


e)


f)




Zadanie 5. Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór punktów (x, y) określony przez dane warunki:

a) $4 < x < 8$;

b) $1 < y < 2$;

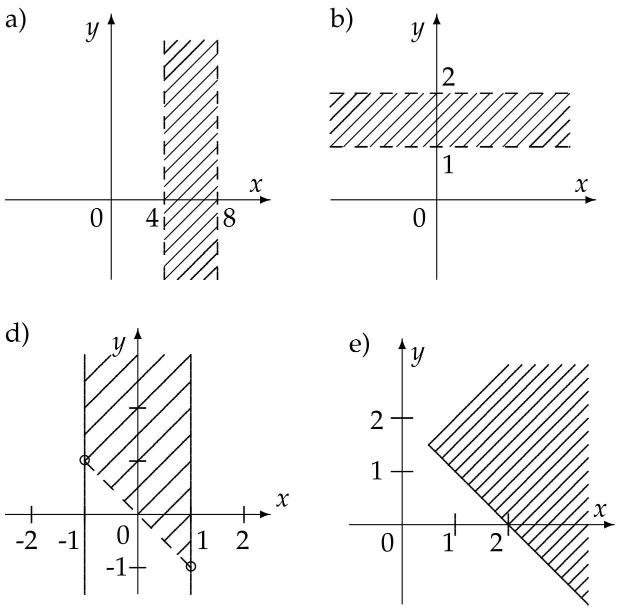
c) $\begin{cases} y \geqslant x^2, \\ y < 4; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y > 0 \\ |x| \leqslant 1; \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y \geqslant 2, \\ x - y \geqslant -1; \end{cases}$

f) $\begin{cases} |x| \leqslant 1, \\ |y| \leqslant 2. \end{cases}$

Odpowiedź:



0.2. Kilka przykładów programowania liniowego *nadprogramowe*

Zadania dodatkowe

Zadanie 6. Dzieci z klasy Ia z przyniesionych do szkoły 160 kasztanów, 240 żołędzi i wielu zapałek mają robić ludki dwóch rodzajów. Liczby kasztanów i żołędzi potrzebnych do zbudowania jednego ludka każdego rodzaju przedstawia tabelka:

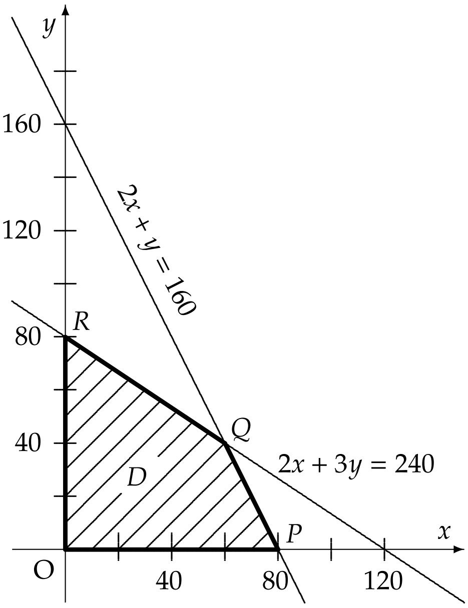
	kasztany	żołędzie
ludek I	2	2
ludek II	1	3

Obliczyć, ile ludków każdego rodzaju powinny zrobić dzieci, by łączna liczba ludków była możliwie największa.

Szkic rozwiązania. Do zrobienia x ludków I-go rodzaju i y ludków II-go rodzaju dzieci potrzebują $2x+y$ kasztanów i $2x+3y$ żołędzi. Z treści zadania wynika, że zachodzą nierówności: $2x+y \leqslant 160$ i $2x+3y \leqslant 240$. Ponadto liczby x i y spełniają oczywiste nierówności $x \geqslant 0$ i $y \geqslant 0$.

Pomimo że liczby ludków są całkowite, to na razie w rozważaniach naszych dopuszczamy niecałkowite wartości liczb x i y. Zbiór D punktów $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ spełniających układ nierówności

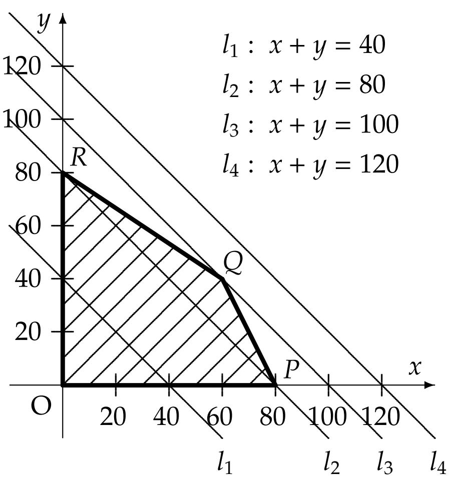
$$\begin{cases} 2x+y \leqslant 160, \\ 2x+3y \leqslant 240, \\ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0, \end{cases}$$



jest przedstawiony na rysunku obok. Jak widać, zbiór ten jest wielokątem wypukłym $OPQR$.
Stawiamy sobie teraz następujące zadanie:
Znaleźć punkt $(x_0, y_0) \in D$, w którym funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, określona wzorem $f(x,y) = x + y$ przyjmuje największą wartość.
Kolejny rysunek przedstawia zbiór D i wykresy kilku prostych mających równania postaci $x+y = a$ (przyjęliśmy tu, że $a \in \{40; 80; 100; 120\}$). Widać, że szukanym punktem (x_0, y_0) jest punkt Q przecięcia się prostych $2x + y = 160$ i $2x + 3y = 240$. Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} 2x+y = 160, \\ 2x+3y = 240, \end{cases}$$

znajdujemy rozwiązanie $(x_0, y_0) = (60; 40)$. Mieliśmy szczęście, gdyż obie liczby x_0 i y_0 są całkowite. Dzięki temu możemy podać odpowiedź.



Odpowiedź: Dzieci powinny zrobić 60 ludków I-szego rodzaju i 40 ludków II-go rodzaju.

Zadanie 7. Zakład stolarski wytwarza stoły i szafy z dwóch rodzajów drewna. Zużycie jednostkowe drewna (w m^3) przedstawia tabela

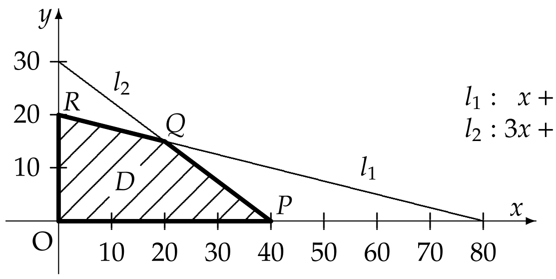
	drewno I-go rodzaju	drewno II-go rodzaju
stół	0,1	0,15
szafa	0,4	0,2

Obliczyć, ile stołów i szaf powinien zrobić zakład, aby osiągnąć maksymalny zysk, jeśli ma on w zapasie 8 m^3 drewna I-go rodzaju i 6 m^3 drewna II-go rodzaju oraz zysk z wytworzenia jednego stołu i jednej szafy jest odpowiednio równy 90 zł i 140 zł.

Szkic rozwiązania. Na zrobienie x stołów i y szaf zakład zużywa $0,1x + 0,4y$ m^3 drewna I-go rodzaju i $0,15x + 0,2y$ m^3 drewna II-go rodzaju. Zarabia on wtedy $90x + 120y$ zł. Zgodnie z treścią zadania liczby x i y spełniają układ nierówności

$$\begin{cases} 0,1x + 0,4y \leqslant 8, \\ 0,15x + 0,2y \leqslant 6, \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \end{cases} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} x + 4y \leqslant 80, \\ 3x + 4y \leqslant 120, \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Poniższy rysunek przedstawia zbiór D punktów $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ spełniających ten układ nierówności.



$l_1:\ x + 4y = 80$
$l_2:\ 3x + 4y = 120$

$P = (40; 0)$
$Q = (20; 15)$
$R = (0; 20)$

Jak widać, zbiór ten jest wielokątem wypukłym $OPQR$.

Znajdziemy teraz taki punkt $(x_0, y_0) \in D$, w którym funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, określona wzorem $f(x, y) = 90x + 140y$ przyjmuje największą wartość. Wiedząc z góry, że największą wartość funkcja f przyjmuje w pewnym spośród wierzchołków wielokąta D, obliczamy:

$$f(O) = f(0; 0) = 0,\ f(P) = f(40; 0) = 3600,\ f(Q) = f(20; 15) = 3900,\ f(R) = f(0; 20) = 2800.$$

Widać stąd, że największą wartością funkcji f jest 3900 i wartość ta jest przyjmowana w punkcie $(20; 15)$.

Odpowiedź: Aby osiągnąć maksymalny zysk, warsztat powinien zrobić 20 stołów i 15 szaf.

Zadanie 8. Zakład produkuje dwa rodzaje pasz trójskładnikowych w workach po 20 kg. Zawartość (w kg) jednego worka paszy przedstawia tabela

	składnik A	składnik B	składnik C
pasza I	10	5	5
pasza II	5	5	10

Zysk ze sprzedaży worka paszy I wynosi 1,10 zł, a worka paszy II 1,30 zł. Obliczyć, ile worków paszy każdego rodzaju powinien wyprodukować zakład, aby osiągnąć jak największy zysk, jeśli wiadomo, że zapasy składników A, B i C wynoszą 60 T, 35 T i 60 T odpowiednio. Podać wielkość tego zysku.

Szkic rozwiązania. Wprowadźmy oznaczenia:

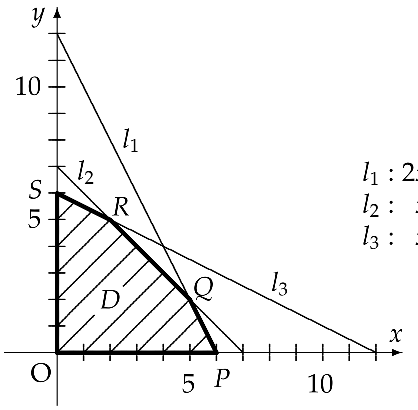
x – liczba worków paszy I (w tys. sztuk),

y – liczba worków paszy II (w tys. sztuk).

Z treści zadania wynika, że liczby x i y spełniają układ nierówności:

$$\begin{cases} 10x + 5y \leqslant 60, \\ 5x + 5y \leqslant 35, \\ 5x + 10y \leqslant 60, \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \end{cases} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} 2x + y \leqslant 12, \\ x + y \leqslant 7, \\ x + 2y \leqslant 12, \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Zbiór D punktów $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, spełniających ten układ przedstawia poniższy rysunek



$$l_1 : 2x + y = 12 \qquad P = (6;0)$$
$$l_2 : x + y = 7 \qquad Q = (5;2)$$
$$l_3 : x + 2y = 12 \qquad R = (2;5)$$
$$S = (0;6)$$

Zbiór D jest wielokątem wypukłym. Znajdziemy teraz taki punkt $(x_0, y_0) \in D$, w którym funkcja $f : D \times \mathbb{R}$, określona wzorem $f(x, y) = 1100x + 1300y$ osiąga największą wartość. Wykorzystamy w tym celu fakt, że wartość ta jest osiągana przez funkcję f w pewnym wierzchołku wielokąta D. Mamy

$$f(O) = f(0,0) = 0, \quad f(P) = f(6,0) = 6600, \quad f(Q) = f(5,2) = 8100,$$

$$f(R) = f(2,5) = 8700, \quad f(S) = f(0;6) = 7800.$$

Zatem $x_0 = 2$, $y_0 = 5$.
Odpowiedź: Zakład powinien wyprodukować 2000 worków paszy I-go rodzaju i 5000 worków paszy II-go rodzaju. Osiągnie wówczas zysk 8700 zł.

Zadanie 9. Na fermie zwierzęta karmi się dwoma rodzajami karmy. Zawartość składników A, B i C w 1 kg karmy (w jednostkach j) oraz cenę 1 kg karmy (w zł) przedstawia poniższa tabela

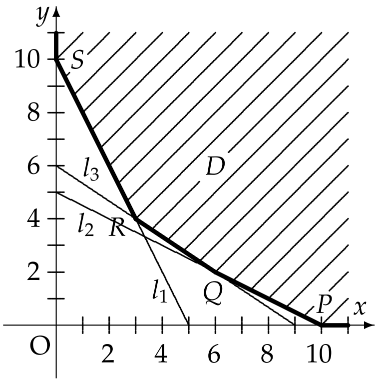
	składnik A	składnik B	składnik C	cena
karma I	2	2	1	0,5
karma II	1	3	2	0,3

Dzienna racja żywieniowa jednego zwierzęcia powinna zawierać przynajmniej 10 j, 18 j i 10 j składników A, B i C odpowiednio. Obliczyć, ile kg karmy I i karmy II powinno składać się na rację dzienną zwierzęcia, aby koszt żywienia zwierząt był najniższy.

Szkic rozwiązania. Niech x i y oznaczają liczbę kg karmy I i karmy II podawanych dziennie zwierzęciu. Łączny dzienny koszt karmy dla jednego zwierzęcia jest równy $0,5x + 0,3y$. Z treści zadania wynika, że liczby x i y spełniają układ nierówności

$$\begin{cases} 2x + y \geqslant 10, \\ 2x + 3y \geqslant 18, \\ x + 2y \geqslant 10, \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Nieograniczony wielokąt wypukły D, będący zbiorem punktów $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ spełniających ten układ, jest przedstawiony na poniższym rysunku.



$l_1 : 2x + \ \ y = 10$
$l_2 : 2x + 3y = 18$
$l_2 : \ \ x + 2y = 10$

$P = (10; 0)$
$Q = (6; 2)$
$R = (3; 4)$
$S = (0; 10)$

Mamy znaleźć taki punkt $(x_0, y_0) \in D$, w którym funkcja $f : D \times \mathbb{R}$, określona wzorem $f(x, y) = 0,5x + 0,3y$ przyjmuje najmniejszą wartość. Ponieważ wartość tę funkcja f przyjmuje w którymś z wierzchołków wielokąta D, więc obliczenia nasze są następujące:

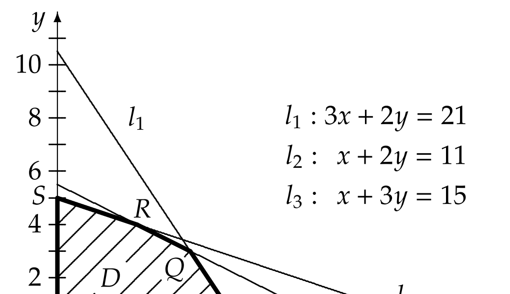
$$f(P) = f(10, 0) = 5, \quad f(Q) = f(6, 2) = 3,6, \quad f(R) = f(3, 4) = 2,7, \quad f(S) = f(0, 10) = 3.$$

Z obliczeń tych wynika, że $x_0 = 3$ i $y_0 = 4$.
Odpowiedź: Aby koszty żywienia zwierząt były najmniejsze, dzienną rację karmy powinny tworzyć 3 kg karmy I i 4 kg karmy II.

Zadanie 10. Wielokąt wypukły $D \subset \mathbb{R}^2$ określony jest przez warunki:

$$\begin{cases} 3x + 2y \leqslant 21, \\ x + 2y \leqslant 11, \\ x + 3y \leqslant 15, \\ x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0. \end{cases}$$

Znaleźć punkt $(x_0, y_0) \in D$, w którym funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, określona wzorem $f(x, y) = x + 2y$ osiąga wartość największą i podać tę wartość.
Szkic rozwiązania. Wielokąt D jest przedstawiony na poniższym rysunku



$P = (7; 0)$
$Q = (5; 3)$
$R = (3; 4)$
$S = (0; 5)$

Funkcja f największą wartość przyjmuje w pewnym spośród wierzchołków O, P, Q, R, S wielokąta D. Obliczamy więc

$$f(O) = f(0, 0) = 0, \qquad f(P) = f(7, 0) = 7, \qquad f(Q) = f(5, 3) = 11,$$

$$f(R) = f(3,4) = 11, \qquad f(S) = f(0,5) = 10.$$

Widzimy, że największą wartość 11 funkcja f przyjmuje w dwóch spośród pięciu wierzchołków wielokąta D.
Odpowiedź: Największą wartością funkcji f jest 11. Wszystkimi punktami zbioru D, w których funkcja f przyjmuje tę wartość są punkty odcinka o końcach $(3;4)$ i $(5;3)$ czyli punkty postaci $(3+2t, 4-t)$, gdzie $t \in \langle 0;1 \rangle$.

Zadania domowe

Zadanie 11. Zakład stolarski wytwarza stoły i szafy z dwóch rodzajów drewna. Zużycie jednostkowe drewna (w m^3) przedstawia tabela

	drewno I-go rodzaju	drewno II-go rodzaju
stół	0,3	0,3
szafa	0,2	0,4

Obliczyć, ile stołów i szaf powinien zrobić zakład, aby osiągnąć maksymalny zysk, jeśli ma on w zapasie 18 m^3 drewna I-go rodzaju i 24 m^3 drewna II-go rodzaju oraz zysk z wytworzenia jednego stołu i jednej szafy jest odpowiednio równy 60 zł i 70 zł. Podać wartość maksymalngo zysku.
Odpowiedź: Zakład powinien zrobić 40 stołów i 30 szaf. uzyska wtedy 4500 zł zysku.

Zadanie 12. Na fermie zwierzęta karmi się dwoma rodzajami karmy. Zawartość składników A, B i C w 1 kg karmy (w jednostkach j) oraz cenę 1 kg karmy (w zł) przedstawia poniższa tabela

	składnik A	składnik B	składnik C	cena
karma I	2	2	1	0,5
karma II	1	3	2	0,3

Dzienna racja żywieniowa jednego zwierzęcia powinna zawierać przynajmniej 10 j, 18 j i 10 j składników A, B i C odpowiednio. Obliczyć, ile kg karmy I i karmy II powinno składać się na rację dzienną zwierzęcia, aby koszt żywienia zwierząt był najniższy.
Odpowiedź: Dzienna racja żywieniowa zwierzęcia powinna składać się z 6 kg karmy I i 1 kg karmy II.

Kilka uwag o programowaniu liniowym.

1^o. *Zaprezentowana tu metoda odgrywa ważną rolę w ekonomii, gdyż w wielu przypadkach pozwala ona zmaksymalizować zysk lub zminimalizować koszty.*

2^o. *Wszystkie przedstawione tu zadania dotyczą problemów, w których występują dwie zmienne x i y. Jednakże metoda ta równie dobrze funkcjonuje w problemach z większą niż 2 liczbą zmiennych. Rolę prostych przejmują wtedy hiperpłaszczyzny, a rolę wielokątów przejmują wielościany wypukłe, będące przekrojami półprzestrzeni wyznaczonych przez hiperpłaszczyzny. I w tym ogólnym przypadku wykorzystuje się fakt, że jeśli funkcjonał liniowy przyjmuje w wielościanie wypukłym wartość największą (ew. najmniejszą), to wartość tę przyjmuje on w pewnym spośród wierzchołków tego wielościanu. W przypadku liczby zmiennych większej od 2 wierzchołki wielościanu wyznacza się metodami algebraicznymi.*

3^o. *Odrębnym zagadnieniem jest to, jak postępowć w przypadku, gdy otrzymane w trakcie obliczeń niecałkowite wartości optymalne nie mają sensu (np. niecałkowite liczby stołów czy też szaf). Znane są skuteczne metody postępowania w takich sytuacjach.*

Literatura

1. Białynicki-Birula Andrzej, Algebra liniowa z geometrią, PWN Warszawa, 1976
2. Janikowski Józef, Elementy algebry liniowej, PZWS Warszawa, 1972