Funkcje wymierne

Jerzy Rutkowski

Teoria

Przypomnijmy, że przez $\mathbb{R}[x]$ oznaczamy zbiór wszystkich wielomianów zmiennej x i o współczynnikach rzeczywistych.

Definicja 1. Funkcją wymierną jednej zmiennej nazywamy funkcję liczbową, którą można określić wzorem postaci $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, gdzie $g, h \in \mathbb{R}[x]$ i przy tym $h \neq 0$. Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\mathbb{R} \setminus A$, gdzie A jest zbiorem miejsc zerowych wielomianu h.

Uwaga. W powyższej definicji zapis $h \neq 0$ oznacza, że h nie jest wielomianem zerowym.

Zbiór wszystkich funkcji wymiernych zmiennej x i o współczynnikach rzeczywstych oznaczamy przez $\mathbb{R}(x)$.

Działania dodawania i mnożenia funkcji wymiernych określa się wzorami:

$$\frac{g}{h} + \frac{k}{l} = \frac{gl + hk}{hl}, \tag{1}$$

$$\frac{g}{h} \cdot \frac{k}{l} = \frac{gk}{hl}. \tag{2}$$

Powyższe wzory są takie same jak wzory określające dodawanie i mnożenie liczb wymiernych.

Równania wymierne

Zadania obowiązkowe

Zadanie 1. Rozwiązać równanie

$$\frac{x-20}{x^2-4x-32} + \frac{3x-18}{x^2-13x+40} = \frac{x-14}{x^2-x-20}. \tag{3}$$

Szkic rozwiązania. Zastosujemy metodę analizy starożytnych. Załóżmy więc, że liczba x jest rozwiązaniem równania. Korzystając ze wzorów Viète'a lub też ze wzorów na pierwiastki równania kwadratowego, rozkładamy na czynniki trójmiany kwadratowe znajdujące się w mianownikach ułamków występujących w równaniu (3). Równanie to przyjmie wtedy postać

$$\frac{x-20}{(x+4)(x-8)} + \frac{3x-18}{(x-5)(x-8)} = \frac{x-14}{(x+4)(x-5)}. \tag{4}$$

Mnożymy teraz obie strony równania (4) przez najmniejszą wspólną wielokrotność mianowników ułamków występujących w tym równaniu czyli przez iloczyn $(x+4)(x-5)(x-8)$. W rezultacie uzyskujemy równanie

$$(x-20)(x-5) + (3x-18)(x+4) = (x-14)(x-8).$$

Stąd kolejno otrzymujemy

$$\begin{aligned} x^2 - 25x + 100 + 3x^2 - 6x - 72 &= x^2 - 22x + 112, \\ 3x^2 - 9x - 84 &= 0, \\ x^2 - 3x - 28 &= 0. \end{aligned}$$

Ostatnie równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki: $x_1 = -4$ i $x_2 = 7$. Pierwiastek x_1 odrzucamy, gdyż przy $x = -4$ np. mianownik $(x + 4)(x - 8)$ w równaniu (4) przyjmuje wartość 0, co nie jest możliwe. Równanie (3) ma więc rozwiązanie $x = 7$.

Uwagi metodologiczne. Uwaga. W nauczaniu szkolnym wielką wagę przywiązuje się do wyznaczania tzw. dziedziny równania czyli zbioru tych liczb rzeczywistych, dla których obie strony równania mają sens. Uczeń, który rozwiązując równanie wymierne, nie wyznaczył poprawnie dziedziny równania, może otrzymać nawet punkty ujemne! O tym, jak niewłaściwe jest takie podejście, niech świadczy następujący przykład równania:

$$\frac{1}{x^3 + x^2 + 1} = 1.$$

Wyznaczenie dziedziny tego równania jest równoznaczne ze znalezieniem pierwiastków rzeczywistych wielomianu $f(x) = x^3 + x^2 + 1$. Z jednej strony wielomian $f(x)$ jako wielomian stopnia nieparzystego ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty (łatwo sprawdza się, że dokładnie jeden), a z drugiej strony widać, że wielomian $f(x)$ nie ma pierwiastka wymiernego. Zatem znalezienie pierwiastków rzeczywistych wielomianu $f(x)$ wymaga żmudnych obliczeń. Jednakże obliczenia takie są absolutnie niepotrzebne. Bowiem, Aby rozwiązać dane równanie, wystarczy bowiem zastosować metodę analizy starożytnych. Przyjmując, że liczba x jest rozwiązaniem naszego równania, uzyskujemy równanie

$$1 = x^3 + x^2 + 1.$$

Stąd $x^3 + x^2 = 0$ i wobec tego $x = 0$ lub $x = -1$. Sprawdzenie pokazuje (jest ono konieczne), że obie te liczby spełniają dane równanie. Ostateczne dane równanie ma rozwiązanie: $x = 0$ lub $x = -1$.

Zadanie 2. Rozwiązać równanie

$$\frac{24}{x^3 - 8} + \frac{3}{x^2 + 2x + 4} = \frac{10}{x^2 + x - 6}. \tag{5}$$

Szkic rozwiązania. Zastosujemy metodę analizy starożytnych. Zakładamy więc, że liczba x jest rozwiązaniem równania (5). W pierwszym kroku rozkładamy mianowniki ułamków występujących w równaniu na iloczyny czynników nierozkładalnych:

$$\begin{aligned} x^3 - 8 &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4), \\ x^2 + 2x + 4 &= x^2 + 2x + 4, \\ x^2 + x - 6 &= (x - 2)(x + 3). \end{aligned}$$

Widać stąd, że najmniejszy wspólny mianownik rozpatrywanych ułamków jest równy iloczynowi $(x - 2)(x + 3)(x^2 + 2x + 4)$. Mnożąc obie strony równania (5) przez ten najmniejszy wspólny mianownik, uzyskujemy równanie:

$$24(x + 3) + 3(x^2 + x - 6) = 10(x^2 + 2x + 4).$$

Dalsze obliczenia przebiegają następująco:

$$\begin{aligned} 7x^2 - 7x - 14 &= 0, \\ x^2 - x - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Otrzymane równanie ma dwa pierwiastki: $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$. Liczba -1 spełnia równanie (5), natomiast liczba 2 jest miejscem zerowym mianownika np. pierwszego ułamka w równaniu (5) i wobec tego nie jest ona rozwiązaniem równania (5). Ostatecznie równanie (5) ma jedno rozwiązanie $x = -1$.

Zadania domowe

Zadanie 3. Rozwiązać równanie:

a) $\dfrac{2}{x^2-4} + \dfrac{1}{x^2+6x+8} = \dfrac{6}{x^2+3x-10}$;

b) $\dfrac{2x-7}{x^2-7x+12} + \dfrac{3x-3}{x^2+x-20} = \dfrac{5x+17}{x^2+2x-15}$;

c) $\dfrac{2x-16}{x^2-4x-5} + \dfrac{5x-10}{x^2-3x-4} = \dfrac{2x-6}{x^2-9x+20}$;

d) $\dfrac{x-3}{x^2-3x+2} + \dfrac{2x+1}{x^2+x-6} = \dfrac{5x-3}{x^2+2x-3}$;

e) $\dfrac{x-9}{x^2-8x+15} + \dfrac{x+6}{x^2-9x+18} = \dfrac{2x-8}{x^2-11x+30}$;

f) $\dfrac{2x+1}{x^2+x-20} + \dfrac{3x+27}{x^2-2x-35} = \dfrac{2x-5}{x^2-11x+28}$;

g) $\dfrac{x+5}{x^2+13x+42} + \dfrac{4x+30}{x^2+16x+63} = \dfrac{2x+15}{x^2+15x+54}$;

h) $\dfrac{x-10}{x^2+x-12} + \dfrac{x+1}{x^2+2x-15} = \dfrac{x+6}{x^2+9x+20}$;

i) $\dfrac{x-17}{x^2-16x+63} + \dfrac{4x-16}{x^2-14x+45} = \dfrac{3x-11}{x^2-12x+35}$;

j) $\dfrac{4x-12}{x^2-2x-15} + \dfrac{3x-11}{x^2+x-6} = \dfrac{5x-19}{x^2-7x+10}$;

k) $\dfrac{2x-16}{x^2-12x+35} + \dfrac{4x-12}{x^2-2x-15} = \dfrac{7x-9}{x^2-4x-21}$;

l) $\dfrac{x+3}{x^2-15x+44} + \dfrac{2x+25}{x^2+3x-28} + \dfrac{4x+10}{x^2-4x-77} = 0$;

ł) $\dfrac{x-10}{x^2-17x+72} + \dfrac{x-7}{x^2-20x+99} = \dfrac{x-5}{x^2-19x+88}$;

m) $\dfrac{2x-17}{x^2-9x+20} + \dfrac{2x-29}{x^2-11x+28} + \dfrac{2x-6}{x^2-12x+35} = 0$;

n) $\dfrac{2x-6}{x^2-11x+30} + \dfrac{7x-2}{x^2-2x-24} = \dfrac{8x+5}{x^2-x-20}$;

o) $\dfrac{2x-13}{x^2-13x+40} + \dfrac{3x-21}{x^2-16x+55} = \dfrac{2x-19}{x^2-19x+88}$.

Odpowiedź: a) -3; b) 7; c) 3, 8; d) 4; e) $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, 5, 6\}$; f) 6; g) -5, -8; h) 7; i) brak rozwiązań; j) 4, 17; k) brak rozwiązań; l) 6; ł) brak rozwiązań; m) 6, 8; n) brak rozwiązań; o) 9.

Zadanie 4. Rozwiązać równanie:

a) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{2}{x^2-5x+4}=\dfrac{1}{x^2-7x+10}$;

b) $\dfrac{5}{x^2+4x-21}+\dfrac{6}{x^2-9}=\dfrac{3}{x^2+12x+27}$;

c) $\dfrac{1}{x^2-11x+28}+\dfrac{2}{x^2-8x+15}=\dfrac{1}{x^2-9x+20}$;

d) $\dfrac{1}{x^2-7x+12}+\dfrac{3}{x^2-12x+27}=\dfrac{1}{x^2-16x+63}$;

e) $\dfrac{1}{x^2-8x+15}+\dfrac{1}{x^2-12x+35}+\dfrac{1}{x^2-16x+63}=\dfrac{3}{x^2-12x+27}$;

f) $\dfrac{4}{x^2-14x+45}+\dfrac{12}{x^2-4x-32}=\dfrac{13}{x^2-5x-36}$.

Odpowiedź: a) 3, 6; b) -6, -12; c) brak rozwiązań; d) 5; e) $x \in \mathbb{R} \setminus \{3,5,7,9\}$; f) brak rozwiązań.

Zadanie 5. Rozwiązać równanie:

a) $\dfrac{9}{x^3-27}+\dfrac{5}{x^2+3x+9}=\dfrac{2}{x^2-9}$;

b) $\dfrac{5}{x^2-2x+4}+\dfrac{2}{x^2-x-6}=\dfrac{12}{x^3+8}$;

c) $\dfrac{2}{x^3-8}-\dfrac{2}{x^3+8}=\dfrac{1}{x^4+4x^2+16}$.

Odpowiedź: a) -4; b) 1; 2; c) ± 6.

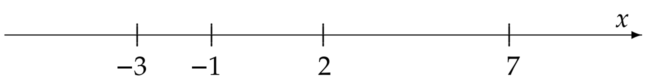
Nierówności wymierne

Zadania obowiązkowe

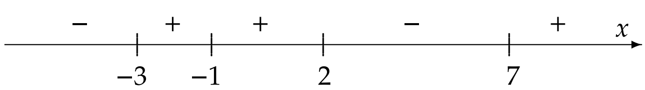
Zadanie 6. Rozwiązać nierówność $\dfrac{(x+3)(x-7)}{(x+1)^2(x-2)} \geqslant 0$.

Szkic rozwiązania. Oznaczmy funkcję wymierną stojącą po lewej stronie danej nierówności przez $f(x)$. Możemy postępować według następującej procedury.

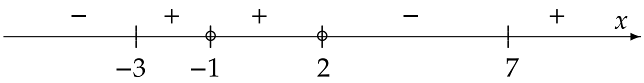
Krok 1^0. Zaznaczamy na osi liczbowej pierwiastki licznika i pierwiastki mianownika funkcji wymiernej $f(x)$:



Krok 2^o. Zaznaczamy na naszym schemacie znaki wartości przyjmowanych przez funkcję wymierną $f(x)$ w przedziałach otwartych wyznaczonych przez zaznaczone punkty (bowiem w każdym z tych przedziałów funkcja wymierna $f(x)$ przyjmuje wartości tego samego znaku):



Krok 3^o. Wykluczamy miejsca zerowe mianownika ze zbioru rozwiązań danej nierówności. Można to zaznaczyć następująco:



Krok 4^o. Z otrzymanego schematu odczytujemy końcowe rozwiązanie danej nierówności.
Odpowiedź: $x \in \langle -3; -1) \cup (-1; 2) \cup \langle 7, \infty)$.

Uwagi metodologiczne. Kolejność kroków 2^o i 3^o można zmienić. Co więcej, gdybyśmy rozwiązywali nierówność ostrą, to pominęlibyśmy krok 3^o.

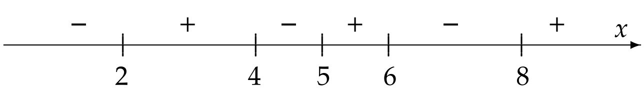
W nauczaniu szkolnym składnikiem procedury rozwiązywania nierówności wymiernych jest tworzenie tzw. siatki znaków. Jak widać chociażby na powyższym przykładzie, można obejść się bez tych siatek. Ci, którzy uważają, że siatki znaków są wskazane, mogą je na ćwiczeniach tworzyć.

Zadanie 7. Rozwiązać nierówność $\dfrac{4}{x-2} + \dfrac{1}{x-5} > \dfrac{4}{x-4}$.

Szkic rozwiązania. Doprowadzamy wpierw daną nierówność do postaci $\dfrac{g(x)}{h(x)} > 0$, gdzie $g(x), h(x) \in \mathbb{R}[x]$ i przy tym wielomiany $g(x)$ i $h(x)$ przedstawiamy w postaci iloczynów wielomianów nierozkładalnych. W tym celu dokonujemy kolejno następujących przekształceń algebraicznych:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{x-2} + \frac{1}{x-5} - \frac{4}{x-4} &> 0,\\
\frac{4(x-4)(x-5) + (x-2)(x-4) - 4(x-2)(x-5)}{(x-2)(x-4)(x-5)} &> 0,\\
\frac{x^2 - 14x + 48}{(x-2)(x-4)(x-5)} &> 0,\\
\frac{(x-6)(x-8)}{(x-2)(x-4)(x-5)} &> 0.
\end{aligned}$$

Postępując podobnie jak w przykładzie 6, otrzymujemy poniższy diagram:



Odczytujemy z niego rozwiązanie $x \in (2; 4) \cup (5; 6) \cup (8, \infty)$.

Zadanie 8. Rozwiązać nierówność $\dfrac{x-1}{x^2-4x+9} < \dfrac{x-3}{x^2-5x+7}$.

Szkic rozwiązania. Ponieważ trójmiany kwadratowe x^2-4x+9 i x^2-5x+7 mają ujemne wyróżniki i dodatnie współczynniki przy x^2, więc dla każdego $x \in \mathbb{R}$ przyjmują one wartości dodatnie.

Możemy więc obie strony danej nierówności pomnożyć stronami przez iloczyn wspomnianych trójmianów kwadratowych. Obliczenia nasze przebiegają wtedy następująco:

$$\begin{aligned}
(x-1)(x^2-5x+7) &< (x-3)(x^2-4x+9),\\
x^3-6x^2+12x-7 &< x^3-7x^2+21x-27,\\
x^2-9x+20 &< 0,\\
(x-4)(x-5) &< 0.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: $x \in (4; 5)$.

Zadania domowe

Zadanie 9. Rozwiązać nierówność:

a) $\dfrac{x-6}{x-13} \leqslant 0$; b) $\dfrac{(x-7)(x+4)}{x-5} < 0$;

c) $\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-3)(x-5)} \geqslant 0$; d) $\dfrac{(x+3)(x-4)}{(x-11)(x-6)} \leqslant 0$;

e) $\dfrac{x(x-1)(x+2)}{(x-5)(x-7)(x+4)} > 0$; f) $\dfrac{(x-5)(x+6)^3(x+9)}{(x-1)^2(x+2)(x+4)^4} \geqslant 0$.

Odpowiedź: a) $x \in \langle 6; 13)$; b) $x \in (-\infty, -4) \cap (5; 7)$; c) $x \in (-\infty, -1\rangle \cap \langle 2; 3) \cup (5, \infty)$; d) $x \in \langle -3; 4\rangle \cup (6; 11)$; e) $x \in (-4; -2) \cup (0; 1) \cup (7, \infty)$; f) $x \in (-\infty, -9\rangle \cup \langle -6, -4) \cup (-4, -2) \cup \langle 5, \infty)$.

Zadanie 10. Rozwiązać nierówność:

a) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-3} > 0$; b) $\dfrac{1}{x-4} > \dfrac{2}{x-1}$;

c) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{8}{x+2} \leqslant \dfrac{15}{x+5}$; d) $\dfrac{1}{x-5} + \dfrac{3}{x-3} \geqslant 2$.

Odpowiedź: a) $x \in (1, 2) \cup (3, \infty)$; b) $x \in (-\infty, 1) \cup (4, 7)$; c) $x \in (-5, -2) \cup \langle 0; 1) \cup \langle 6, \infty)$; d) $x \in (3; 4\rangle \cup (5, 6\rangle$.

Zadanie 11. Rozwiązać nierówność:

a) $\dfrac{5x-48}{x^2-8x+20} > -1$; b) $\dfrac{x-2}{x^2+2} \leqslant \dfrac{x+8}{x^2+10x+26}$.

Odpowiedź: a) $x \in (-\infty, -4) \cup (7, \infty)$; b) $x \leqslant 17$.

Uwaga. Należy bardzo uczulać studentów na to, że nie można mnożyć nierówności stronami przez wyrażenie, które dla pewnych dwóch argumentów przyjmuje wartości różnych znaków (chyba, że wyjściowa nierówność to $0 \leqslant 0$).

Rozkład funkcji wymiernej na sumę wielomianu i ułamków prostych

(nieobowiązkowe)

Teoria

W punkcie tym ograniczamy się wyłącznie do funkcji wymiernych o współczynnikach rzeczywistych. Przypomnijmy więc ważne oznaczenia:

$\mathbb{R}[x]$ – zbiór wszystkich wielomianów zmiennej x i o współczynnikach rzeczywistych,

$\mathbb{R}(x)$ – zbiór wszystkich funkcji wymiernych zmiennej x i o współczynnikach rzeczywstych.

Twierdzenie 1. *Dla każdej funkcji wymiernej* $\frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}(x)$ *istnieją wielomiany* $q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$ *takie, że*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \qquad \text{oraz} \qquad \operatorname{st} r(x) < \operatorname{st} g(x).$$

Powyższe twierdzenie wynika natychmiast z twierdzenia o dzieleniu z resztą dla wielomianów. Można je wysłowić następująco:

Każdą funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej takiej, że stopień jej licznika jest mniejszy od stopnia jej mianownika.

Przypomnijmy pewne ważne twierdzenie z arytmetyki wielomianów o współczynnikach rzeczywistych:

Twierdzenie 2. *Każdy wielomian* $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ *stopnia dodatniego ma następujący rozkład na iloczyn wielomianów nierozkładalnych o współczynnikach rzeczywistych:*

$$f(x) = (x - a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - a_m)^{k_m} (x^2 + b_1 x + c_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + b_n x + c_n)^{l_n},$$

gdzie $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_1, \ldots a_m \in \mathbb{R}$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ *oraz* $\Delta_j = b_j^2 - 4c_j < 0$ *dla* $j = 1, \ldots, n$.

W wielu zagadnieniach (np. przy całkowaniu funkcji wymiernych) ważną rolę odgrywają pewne specjalne funkcje wymierne zwane ułamkami prostymi.

Definicja 2. Ułamkiem prostym o współczynnikach rzeczywistych nazywamy każdą funkcję wymierną postaci

$$\frac{A}{(x-a)^k} \qquad \text{lub} \qquad \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^l},$$

gdzie $k, l \in \mathbb{N}$, $A, B, C, a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $b^2 - 4c < 0$.

Ułamkami prostymi o współczynnikach rzeczywistych są np. funkcje wymierne:

$$\frac{5}{x-4}, \qquad \frac{7}{(x+6)^2}, \qquad \frac{8x - 13}{x^2 + x + 1}, \qquad \frac{14x - 9}{(x^2 - 4x + 7)^3} \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{(x^2 - 5x + 9)^6}.$$

Twierdzenie 3. *Każdą funkcję wymierną, której licznik ma niższy stopień niż mianownik, można przedstawić w postaci sumy ułamków prostych.*

Z powyższego twierdzenia i z twierdzenia 1 wynika następujący wniosek:

Wniosek. Każda funkcja wymierna rozkłada się na sumę wielomianu i ułamków prostych.

Zadania obowiązkowe

Zadanie 12. Rozłożyć na sumę ułamków prostych daną funkcję wymierną:

a) $\dfrac{4x^2 - 11x - 2}{(x-2)^3}$; b) $\dfrac{5x^2 + 30x + 61}{(x+4)(x+1)(x-3)}$;

c) $\dfrac{2x^2+39x+1}{(x-1)^2(x+5)}$; d) $\dfrac{11x^2+12x-5}{(x-2)(x^2+x+1)}$.

Szkic rozwiązania. Ad a). Ponieważ stopień licznika danej funkcji wymiernej jest mniejszy od stopnia jej mianownika, więc funkcja ta rozkłada się na sumę ułamków prostych. Co więcej, wiadomo, że rozkład ten ma postać

$$\frac{4x^2-11x-2}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3}.$$

Mnożąc powyższą równość stronami przez $(x-2)^3$, uzyskujemy następującą równość wielomianów

$$4x^2-11x-2 \quad = \quad A(x-2)^2 + B(x-2) + C. \tag{6}$$

Jednym spośród kilku sposobów wyznaczenia współczynników A, B i C jest zastosowanie iterowanego schematu Hornera do dzielenia wielomianu $4x^2-11x-2$ przez $x-2$. Obliczenia przebiegają wtedy następująco:

	4	−11	−2
2	4	−3	8
2	4	5	

Wynikają z nich równości:

$$4x^2-11x-2 = (x-2)(4x-3)-8 = (x-2)[4(x-2)+5]-8 = 4(x-2)^2+5(x-2)-8.$$

Odczytujemy stąd, że $A=4, B=5, C=-8$ i wobec tego szukany rozkład danej funkcji wymiernej na sumę ułamków prostych jest następujący:

$$\frac{4x^2-11x-2}{(x-2)^2} = \frac{4}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2} - \frac{8}{(x-2)^3}.$$

Uwaga. Inny sposób wyznaczenia współczynników A, B i C polega na rozwiązaniu układu równań liniowych otrzymanego jako efekt porównania współczynników przy tych samych potęgach x w wielomianach stojących po obu stronach równości (6) po uprzednim wykonaniu działań po prawej stronie tej równości.

Ad b). Również tu stopień licznika funkcji wymiernej jest mniejszy od stopnia mianownika. W tym przypadku rozkład funkcji wymiernej na sumę ułamków prostych ma postać

$$\frac{5x^2+30x+61}{(x+4)(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}.$$

Wynika stąd poniższa równość wielomianów

$$5x^2+30x+61 = A(x+1)(x-3) + B(x+4)(x-3) + C(x+4)(x+1).$$

Jeden ze sposobów wyznaczania współczynników A, B i C polega na dokonywaniu odpowiednich podstawień. W naszym przypadku są to podstawienia: $x \mapsto -4$, $x \mapsto -1$ i $x \mapsto 3$. Obliczenia przebiegają wtedy następująco:

$x \mapsto -4$, $\quad 21 = 21A$, $\quad A = 1$;

$x \mapsto -1$, $\quad 36 = -12B$, $\quad B = -3$;

$x \mapsto 3$, $\quad 196 = 28C$, $\quad C = 7$.

Dana funkcja wymierna ma więc następujący rozkład na sumę ułamków prostych

$$\frac{5x^2+30x+61}{(x+4)(x+1)(x-3)} = \frac{1}{x+4} - \frac{3}{x+1} + \frac{7}{x-3}.$$

Ad c). Rozkład danej funkcji wymiernej na sumę ułamków prostych ma następującą postać

$$\frac{2x^2+39x+1}{(x-1)^2(x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+5}.$$

Stąd

$$2x^2+39x+1 \quad = \quad A(x-1)(x+5) + B(x+5) + C(x-1)^2. \tag{7}$$

Dokonując teraz podstawień $x \mapsto 1$ i $x \mapsto -5$, otrzymujemy odpowiednio równości $B = 7$ i $C = -4$. Porównanie współczynników przy x^2 w wielomianach po obu stronach równości (7) doprowadza nas do równania $2 = A + C$. Zatem $A = 6$ i wobec tego

$$\frac{2x^2+39x+1}{(x-1)^2(x+5)} = \frac{6}{x-1} + \frac{7}{(x-1)^2} - \frac{4}{x+5}.$$

Ad d). Zauważmy, że trójmian kwadratowy $x^2 + x + 1$ ma ujemny wyróżnik i wobec tego nie rozkłada się on na iloczyn czynników liniowych o współczynnikach rzeczywistych. Rozkład rozpatrywanej funkcji wymiernej na sumę ułamków prostych jest więc postaci

$$\frac{11x^2+12x-5}{(x-2)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Wynika stąd poniższa równość wielomianów

$$11x^2+12x-5 \quad = \quad A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-2). \tag{8}$$

Podstawienie w tej równości $x \mapsto 2$ daje nam równanie $63 = 7A$, skąd wynika, że $A = 9$. Porównanie współczynników przy x^2 i wyrazów wolnych wielomianów stojących po obu stronach równości (8) doprowadza nas do zależności $11 = 9 + B$ i $-5 = 9 - 2C$, skąd $B = 2$ i $C = 7$. W ten sposób uzyskaliśmy następujący rozkład danej funkcji wmiernej na sumę ułamków prostych

$$\frac{11x^2+12x-5}{(x-2)(x^2+x+1)} = \frac{9}{x-2} + \frac{2x+7}{x^2+x+1}.$$

Zadanie 13. Rozłożyć na sumę wielomianu i ułamków prostych daną funkcję wymierną:

a) $\dfrac{x^3-4x^2+7x+2}{x^2-1}$; b) $\dfrac{x^5+6x^4-4x^3+8x^2-x+13}{x^3}$.

Szkic rozwiązania. Ad a). Mamy tu do czynienia z funkcją wymierną, której licznik nie ma stopnia niższego niż mianownik. Dzielimy więc z resztą licznik tej funkcji wymiernej przez mianownik:

$$x^3-4x^2+7x+2 = (x^2-1)(x-4) + 8x - 2.$$

Z otrzymanej równości wynika związek

$$\frac{x^3-4x^2+7x+2}{x^2-1} = x - 4 + \frac{8x-2}{x^2-1}.$$

Jak widać, szukany wielomian to $x-4$. Należy jeszcze rozłożyć na sumę ułamków prostych funkcję wymierną $(8x-2)/(x^2-1)$, której licznik ma już niższy stopień niż mianownik. Szukany rozkład ma postać

$$\frac{8x-2}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}.$$

Wynika stąd równość

$$8x-2=A(x+1)+B(x-1).$$

Dokonując w tej równości podstawień $x\mapsto 1$ i $x\mapsto -1$, uzyskujemy związki $A=3$ i $B=5$. Szukany rozkład danej w zadaniu funkcji wymiernej jest więc następujący

$$\frac{x^3-4x^2+7x+2}{x^2-1}=x-4+\frac{3}{x-1}+\frac{5}{x+1}.$$

Ad b). Dzieląc przez x^3 kolejne składniki licznika danej funkcji wymiernej, otrzymujemy równość

$$\frac{x^5+6x^4-4x^3+8x^2-x+13}{x^3}=x^2+6x-4+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{13}{x^3}.$$

Jest to żądany rozkład.

Zadania domowe

Zadanie 14. Rozłożyć na sumę ułamków prostych daną funkcję wymierną:

a) $\dfrac{x+15}{x^2-25}$; b) $\dfrac{x+13}{x^2+5x+4}$; c) $\dfrac{7x^2+7x-8}{x^3-x}$;

d) $\dfrac{4x^2+9x+7}{(x+1)(x+2)(x+3)}$; e) $\dfrac{x^2+4x-1}{(x+1)^3}$; f) $\dfrac{4x^2-17x+7}{(x-2)^3}$;

g) $\dfrac{5x^2+5x+6}{x^2(x+3)}$; h) $\dfrac{13x+1}{(x+1)^2(x+5)}$; i) $\dfrac{3x^3-15x^2+32}{x^2(x-4)^2}$;

j) $\dfrac{8x^2+x+16}{(x-3)(x^2+4)}$; k) $\dfrac{5x^3+4x^2-x+1}{(x+2)^2(x^2-x+1)}$; l) $\dfrac{x^3-4x^2+4x+4}{(x^2+1)^2}$.

Odpowiedź: a) $\dfrac{2}{x-5}-\dfrac{1}{x+5}$; b) $\dfrac{4}{x+1}-\dfrac{3}{x+4}$; c) $\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{8}{x}$; d) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{8}{x+3}$;
e) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{(x+1)^2}-\dfrac{4}{(x+1)^3}$; f) $\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{11}{(x-2)^3}$; g) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{4}{x+3}$;
h) $\dfrac{4}{x+1}-\dfrac{3}{(x+1)^2}-\dfrac{4}{x+5}$; i) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2}{x-4}-\dfrac{1}{(x-4)^2}$; j) $\dfrac{x+4}{x^2+4}+\dfrac{7}{x-3}$;
k) $\dfrac{4}{x+2}-\dfrac{3}{(x+2)^2}+\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$; l) $\dfrac{x-4}{x^2+1}+\dfrac{3x+8}{(x^2+1)^2}$.

Zadanie 15. Rozłożyć na sumę wielomianu i ułamków prostych daną funkcję wymierną:

a) $\dfrac{x^3+6x^2+5x+3}{(x+1)(x+4)}$; b) $\dfrac{2x^3+7x^2+8x+5}{(x+2)^2}$.

Odpowiedź: a) $x+1+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{5}{x+4}$; b) $2x-1+\dfrac{4}{x+2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}$.

Zadanie 16. Wykorzystując rozkłady na ułamki proste składników poniższej sumy, obliczyć tę sumę:

$$s = \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \ldots + \frac{1}{(x+40)(x+41)}.$$

Odpowiedź: Zachodzą równości:

$$\begin{aligned} s &= \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{x+40} - \frac{1}{x+41}\right) \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+41} = \frac{40}{x^2+42x+41}. \end{aligned}$$

Liczne przykłady tytułowych rozkładów można znaleźć w tych podręcznikach do analizy matematycznej, w których omawia się całkowanie funkcji wymiernych. Kilka przykładów jest też zamieszczonych na stronach 225-229 w mojej książce „Algebra abstrakcyjna w zadaniach".