Kombinatoryka

Jerzy Rutkowski

2. Elementy kombinatoryki

2.1. Permutacje

Teoria

Definicja 1. Niech $n \in \mathbb{N}$. Permutacją n-elementowego zbioru A nazywamy dowolną funkcję różnowartościową $f : \{1, \dots, n\} \to A$.

Innymi słowy: permutacją n-elementowego zbioru A nazywamy dowolny n-elementowy ciąg różnych elementów zbioru A.

Uwaga 2. Zamiast mówić o permutacjach n-elementowego zbioru $\{a_1, \dots, a_n\}$ mówimy też o permutacjach elementów $a_1, \dots, a_n$.

Przykład 3. Wszystkimi permutacjami zbioru $A = \{a, b, c\}$ są ciągi

$$(a, b, c), \quad (a, c, b), \quad (b, a, c), \quad (b, c, a), \quad (c, a, b), \quad (c, b, a).$$

Twierdzenie 4. *Liczba wszystkich permutacji zbioru n-elementowego jest równa $n!$.*

Liczbę wszystkich permutacji zbioru n-elementowego oznacza się czasami przez P_n. Zgodnie z powyższym twierdzeniem zachodzi równość

$$P_n = n!. \tag{1}$$

Zadania obowiązkowe

Zadanie 1. Wypisać wszystkie permutacje liczb 1, 2 i 3.

Szkic rozwiązania. Wypisując kolejno po dwie permutacje o pierwszym wyrazie 1, o pierwszym wyrazie 2 i o pierwszym wyrazie 3, otrzymujemy wszystkie permutacje liczb 1, 2 i 3. Zatem wszystkimi permutacjami tych liczb są ciągi: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$.

Zadanie 2. Obliczyć liczbę różnych słów (sensownych lub nie), które można uzyskać w wyniku przestawiania liter w słowie sasanka.

Szkic rozwiązania. Odnotujmy wpierw, że siedmioliterowe słowo sasanka tworzą 3 litery a, 2 litery s i po jednej literze k i n. Ponumerujmy kolejne litery tego słowa liczbami od 1 do 7. Liczba permutacji tych numerów jest równa 7!, a każdej takiej permutacji odpowiada pewne słowo utworzone z wyżej wymienionych liter. Jednakże liczba takich permutacji numerów, którym odpowiada to samo słowo jest równa $3! \cdot 2!$. Bowiem dwom permutacjom odpowiada to samo słowo wtedy i tylko wtedy, gdy liczby 5 (numery litery n) w obu tych permutacjach są na tym samym miejscu, liczby 6 (numery litery k) są na tym samym miejscu, zbiory numerów miejsc, na których występują liczby 1 i 3 (numery liter s) są równe oraz zbiory numerów miejsc, na których występują liczby 2, 4 i 7 (numery liter a) są równe. Wynika stąd, że jeśli N oznacza szukaną liczbę słów, to zachodzą równości

$$N = \frac{7!}{3! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2} = 420.$$

Zadanie 3. Obliczyć liczbę takich permutacji liter a, b, c, d, e i f, których pierwszym wyrazem permutacji jest c.

Szkic rozwiązania. Ponieważ każdą z rozpatrywanych permutacji można utożsamiać z odpowiednią permutacją pięciu liter a, b, d, e i f występujących po literze c, więc szukana liczba permutacji jest równa 5! czyli 120.

Zadania dodatkowe

Zadanie 4. Wypisać wszystkie permutacje liczb 1, 2, 3 i 4.

Szkic rozwiązania. Aby otrzymać wszystkie 24 permutacje liczb 1, 2, 3 i 4, wypisujemy kolejno po sześć permutacji o pierwszym wyrazie 1, o pierwszym wyrazie 2 itd.:

$$\begin{array}{llllll}
(1,2,3,4), & (1,2,4,3), & (1,3,2,4), & (1,3,4,2), & (1,4,2,3), & (1,4,3,2),\\
(2,1,3,4), & (2,1,4,3), & (2,3,1,4), & (2,3,4,1), & (2,4,1,3), & (2,4,3,1),\\
(3,1,2,4), & (3,1,4,2), & (3,2,1,4), & (3,2,4,1), & (3,4,1,2), & (3,4,2,1),\\
(4,1,2,3), & (4,1,3,2), & (4,2,1,3), & (4,2,3,1), & (4,3,1,2), & (4,3,2,1).
\end{array}$$

Zadania domowe

Zadanie 5. Obliczyć liczbę takich permutacji liter a, b, c, d, e i f, które spełniają dany warunek:

a) trzy pierwsze wyrazy tworzą zbiór $\{b, c, d\}$;

b) samogłoski a i e są sąsiednimi wyrazami permutacji.

Odpowiedź: a

) 36; b) 240.

2.2. Kombinacje (bez powtórzeń)

Teoria

Definicja 5. Niech $k, n \in \mathbb{N}$ i niech $k \leqslant n$. k-elementową kombinacją n-elementowego zbioru A nazywamy dowolny k-elementowy podzbiór zbioru A.

Przykład 6. Wszystkimi 2-elementowymi kombinacjami zbioru $A = \{a, b, c, d\}$ są podzbiory:

$$\{a,b\}, \quad \{a,c\}, \quad \{a,d\}, \quad \{b,c\}, \quad \{b,d\}, \quad \{c,d\}.$$

Twierdzenie 7. *Liczba k-elementowych kombinacji n-elementowego zbioru A jest równa* $\binom{n}{k}$.

Liczbę wszystkich k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego oznacza się często przez C_n^k. Zgodnie z powyższym twierdzeniem zachodzi równość

$$C_n^k = \binom{n}{k}. \tag{2}$$

Zadania obowiązkowe

Zadanie 6. Obliczyć liczbę sposobów skreślenia kuponu w totolotku.

Szkic rozwiązania. Skreślenie kuponu w totolotku jest równoznaczne z wyborem sześciu spośród 49-ciu liczb. Liczba sposobów skreślenia jest więc równa

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13\,938\,816.$$

Zadanie 7. Obliczyć liczbę możliwych rozdań przy grze w brydża.

Szkic rozwiązania. Talia do gry w brydża liczy 52 karty. Każdy z czterech graczy otrzymuje po 13 kart. Ponumerujmy graczy liczbami od 1 do 4. Karty można rozdać następująco: najpierw wybieramy 13 kart spośród 52 dla pierwszego gracza (można to uczynić na $\binom{52}{13}$ sposobów) następnie z pozostałych 39-ciu kart wybieramy 13 kart dla drugiego gracza (na $\binom{39}{13}$ sposobów), z kolei spośród 26-ciu pozostałych kart wybieramy 13 kart dla trzeciego gracza (na $\binom{26}{13}$ sposobów), a pozostałe 13 kart dajemy czwartemu graczowi. Łączna liczba rozdań jest więc równa

$$\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}.$$

Zadania dodatkowe

Zadanie 8. W klasie jest 15 dziewcząt i 13 chłopców. Obliczyć, na ile sposobów można skompletowć liczącą dwie dziewczynki i jednego chłopca delegację tej klasy.

Szkic rozwiązania. Spośród piętnastu dziewcząt można wybrać dwie na $\binom{15}{2}$ czyli 105 sposobów, a jednego chłopca spośród trzynastu można wybrać na $\binom{13}{1}$ czyli 13 sposobów. Ponieważ każdy wybór dwóch dziewcząt można skojarzyć z każdym wyborem jednego chłopca, więc liczba sposobów wyboru delegacji jest równa iloczynowi liczby sposobów wyboru dwóch dziewcząt przez liczbę sposobów wyboru jednego chłopca. Jest więc równa $\binom{15}{2}\binom{13}{1}$ tj. $105 \cdot 13$. Wobec tego szukana liczba sposobów wyboru delegacji jest równa 1365.

Zadania domowe

Zadanie 9. W klasie jest 16 dziewcząt i 12 chłopców. Obliczyć, na ile sposobów można skompletowć liczącą trzy dziewczynki i dwóch chłopców delegację tej klasy.
Odpowiedź: 36950.

Zadanie 10. Do dyspozycji n osób grających w tysiąca było k talii kart, przy czym $3k \leqslant n$. Obliczyć liczbę N sposobów wyboru k ponumerowanych zbiorów trójek osób, które będą mogły grać tymi kartami. *Uwaga.* W tysiąca jedną talią grają trzy osoby.

Odpowiedź: $N = \binom{n}{3}\binom{n-3}{3}\cdot\ldots\cdot\binom{n-3k+3}{3} = \dfrac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-3k+1)}{6^k} = \dfrac{n!}{6^k(n-3k)!}$.

2.3. Wariacje bez powtórzeń

Teoria

Definicja 8. Niech $k, n \in \mathbb{N}$ i niech $k \leqslant n$. k-elementową wariacją bez powtórzeń n-elementowego zbioru A nazywamy dowolną funkcję różnowartościową $f : \{1, \ldots, k\} \to A$.

Innymi słowy: k-elementową wariacją bez powtórzeń n-elementowego zbioru A nazywamy dowolny k-wyrazowy ciąg różnych elementów zbioru A.

Twierdzenie 9. *Liczba k-elementowych wariacji bez powtrzeń n-elementowego zbioru A jest równa* $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Liczbę wszystkich k-elementowych wariacji bez powtrzeń zbioru n-elementowego oznacza się często przez V_n^k. Zgodnie z powyższym twierdzeniem zachodzi równość

$$V_n^k = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1). \tag{3}$$

Zadania obowiązkowe

Zadanie 11. Obliczyć liczbę różnych flag utworzonych przez trzy poziome różnokolorowe pasy, których kolory można wybrać spośród 6-ciu kolorów.

Szkic rozwiązania. Szukana liczba flag jest równa liczbie różnoelementowych ciągów (k_1, k_2, k_3), gdzie k_1, k_2, k_3 oznaczają kolory pasów górnego, środkowego i dolnego odpowiednio. Wobec tego liczba takich flag jest równa V_6^3 czyli $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Zadanie 12. Obliczyć liczbę sposobów takiego posadzenia pięciu pań i trzech panów na ośmiu ponumerowanych miejscach przy okrągłym stole, by żadnych dwóch panów nie siedziało obok siebie.

Szkic rozwiązania. Ponumerujmy oddzielnie panie i panów. Każdy ze sposobów posadzenia pięciu pań i trzech panów tak, aby były spełnione warunki zadania, można osiągnąć postępując wg następującej procedury:

1^o. Wybieramy miejsce dla pani nr 1 (8 sposobów);

2^o. Wybieramy kolejność, w jakiej na prawo od pani nr 1 będą siedziały pozostałe cztery panie, czyli tworzymy permutację liczb 2, 3, 4 i 5 (4! sposobów);

3^o. Tworzymy ciąg (p_1, p_2, p_3) numerów pań, które bezpośrednio na prawo od siebie bedą miały panów nr 1, nr 2 i nr 3 odpowiednio ($5 \cdot 4 \cdot 3$ sposobów).

Łącznie mamy $8 \cdot 4! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ czyli 11 520 sposobów.

Zadania dodatkowe

Zadanie 13. Obliczyć, ile jest liczb pięciocyfrowych o cyfrach parami różnych.
Odpowiedź: 27 216.

Zadania domowe

Zadanie 14. Niech liczby naturalne k, m spełniają warunek $k \geqslant m$. Obliczyć liczbę sposobów takiego posadzenia k kobiet i m mężczyzn na $k+m$ miejscach przy okrągłym stole, by żadnych dwóch panów nie siedziało obok siebie.
Odpowiedź: Rozumując tak jak w rozwiązaniu zadania z zadania 12, wnioskujemy, że szukana liczba jest równa $(k + m) \cdot (k - 1)! \cdot k \cdot (k - 1) \cdot \ldots \cdot (k - m + 1)$.

Zadanie 15. Obliczyć liczbę sposobów rozdzielenia trzech medali (złotego, srebrnego i brązowego) pomiędzy sześciu zawodników.
Odpowiedź: 120.

2.4. Wariacje z powtórzeniami

Twierdzenie 10. *Niech A będzie dowolnym zbiorem niepustym. Każdą funkcję $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to A$ nazywamy k-wyrazową wariacją z powtórzeniami elementów zbioru A.*

Z powyższej definicji wynika, że k-wyrazowe wariacje z powtórzeniami elementów zbioru A to po prostu k-wyrazowe ciągi elementów zbioru A.

Twierdzenie 11. *Niech zbiory A i B mają odpowiednio m i n elementów. Liczba wszystkich funkcji $f : A \to B$ jest równa n^m.*

****

Zadania obowiązkowe

Zadanie 16. Na parterze dziesięciopiętrowego domu do windy wsiadło 8 osób. Obliczyć liczbę sposobów, na jakie osoby te mogą wysiąść z windy (pod uwagę bierzemy tu jedynie numery pięter, na których wysiadają poszczególne osoby).

Szkic rozwiązania. Ponumerujmy te osoby liczbami od 1 do 8. Szukana liczba sposobów jest równa liczbie 8-elementowych ciągów $(p_1, \ldots, p_8)$, gdzie dla każdego $k \in \{1, \ldots, 8\}$ wyraz p_k jest numerem piętra, na którym wysiada k-ta osoba. Ciągów takich jest 10^8.

Zadania dodatkowe

Zadanie 17. Obliczyć liczbę takich numerów tablic rejestracyjnych, które na początku mają dowolne trzy duże litery alfabetu łacińskiego (alfabet ten ma 26 liter) a następnie dowolne cztery cyfry.
Odpowiedź: 175 760 000.

Zadanie 18. Obliczyć liczbę sposobób takiego rozmieszczenia dziewięciu kul ponumerowanych liczbami od 1 do 9 w trzech pudełkach ponumerowanych liczbami od 1 do 3, by spełniony był warunek:

a) pudełko nr 1 jest puste;

b) kula nr 1 jest w pudełku nr 1;

c) w pudełku nr 1 jest dokładnie jedna kula;

d) w pudełku nr 1 jest przynajmniej jedna kula;

e) w pudełku nr 1 jest co najwyżej jedna kula.

Uwagi metodologiczne. Każde z rozważanych rozmieszczeń można utożsamiać z 9-cio wyrazowym ciągiem numerów pudełek, w których znajdują się kolejne kule.
Odpowiedź: a) 2^9 (= 512); b) $1 \cdot 3^8$ (= 6561); c) $9 \cdot 2^8$ (= 2304); d) $3^9 - 2^9$ (= 19 171); e) $9 \cdot 2^8 + 2^9$ (= 2816).

Zadanie 19. Obliczyć liczbę sposobów takiego rozmieszczenia ośmiu ponumerowanych kul w pięciu ponumerowanych pudełkach, by liczba pustych pudełek była równa:

a) 4; b) 3; c) 2;

Odpowiedź: a) $\binom{5}{1}$ (= 5); b) $\binom{5}{2}(2^8 - 2)$ (= 2540); c) $\binom{5}{3}[3^8 - 3(2^8 - 2) - 3]$ (= 57 960).

Zadania domowe

Zadanie 20. Obliczyć liczbę sposobów rozmieszczenia siedmiu ponumerowanych kul w czterech ponumerowanych pudełkach.
Odpowiedź: 4^7 (= 16 384).

Zadanie 21. Obliczyć, ile jest liczb siedmiocyfrowych oraz ile spośród nich dzieli się przez 10.
Odpowiedź: $9 \cdot 10^6$ (= 9 000 000) oraz $9 \cdot 10^5$ (= 900 000).

Zadanie 22. Na każde z dziesięciu pytań pewnego testu można dać jedną z czterech odpowiedzi a, b, c i d. Obliczyć liczbę sposobów takiego wypełnienia tego testu, by odpowiedzi na dowolne dwa kolejne pytania były różne.
Odpowiedź: $4 \cdot 3^9$ (= 78 732).

2.5. Zadania różne

Zadania domowe

Zadanie 23. Obliczyć, na ile sposobów można z dziesięciu pań i dziesięciu panów utworzyć 10 nienumerowanych par tanecznych.
Odpowiedź: 10! (= 3 628 800).

Zadanie 24. Obliczyć, na ile sposobów można z dziesięciu pań i dziesięciu panów utworzyć 10 ponumerowanych par tanecznych.
Odpowiedź: $(10!)^2$ (= 13 168 189 440 000).

Zadanie 25. Obliczyć, na ile sposobów można z dziesięciu pań i trzynastu panów utworzyć 10 nienumerowanych par tanecznych.
Odpowiedź: $\binom{13}{3}10!$ (= $13 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 4$ = 1 037 836 800).

Zadanie 26. Obliczyć, na ile sposobów można z dziesięciu pań i trzynastu panów utworzyć 10 ponumerowanych par tanecznych.
Odpowiedź: $\binom{13}{3}(10!)^2$ (= 3 766 102 179 840 000).