Wielomiany

dr Tadeusz Werbiński

Teoria

Na początku przypomnimy kilka szkolnych definicji i twierdzeń dotyczących wielomianów. Autorzy podręczników szkolnych podają różne definicje wielomianu - dla jednych wielomian, to funkcja ; dla drugich wielomian, to suma jednomianów, a jeszcze dla innych wielomian jest wyrażeniem algebraicznym. Na wykładzie z algebry usłyszycie Państwo, że wielomianem nazywamy ciąg nieskończony o prawie wszystkich wyrazach równych zero, a dodawanie i mnożenie wielomianów będzie określone jako dodawanie i mnożenie ciągów. Takie podejście okaże się naturalnym, bo przecież dodając lub mnożąc wielomiany, wykonujemy te operacje na współczynnikach tych wielomianów. Podobnie przy mnożeniu wielomianu przez liczbę.

Definicja 1. Funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, gdzie $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $a_n \neq 0$, nazywamy wielomianem stopnia n jednej zmiennej rzeczywistej x. Liczby $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ nazywamy współczynnikami wielomianu f, współczynnik a_0 nazywamy wyrazem wolnym. Stopień wielomianu f oznaczamy $st(f)$ lub $deg(f)$. Wielomianem zerowym nazywamy funkcję $f(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Przyjmujemy dodatkowo, że stopień wielomianu zerowego jest równy $-\infty$.

Wielomiany stopnia zero nazywamy wielomianami stałymi; wielomiany stopnia pierwszego, drugiego nazywamy odpowiednio liniowymi (funkcje liniowe) lub kwadratowymi (funkcje kwadratowe). Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych zmiennej rzeczywistej x oznaczamy przez $\mathbb{R}[x]$.
Dwa wielomiany f i g są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i ich współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej x są równe. Wobec tego wielomian
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ jest wielomianem zerowym, gdy $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$.
Suma i iloczyn wielomianów jest wielomianem i jeśli $st(f) = m$, $st(g) = n$, to $st(f+g) \leqslant max(m, n)$ oraz $st(f \cdot g) = m + n$.
Niech $c \in \mathbb{R}$. Liczbę $f(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_1 c + a_0$ nazywamy wartością wielomianu f w punkcie c.

Twierdzenie 1. *Niech f i g będą wielomianami o współczynnikach rzeczywistych, przy czym g nie jest wielomianem zerowym. Istnieją wtedy jednoznacznie wyznaczone wielomiany q i r o współczynnikach rzeczywistych takie, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ spełnione są warunki:*
(a) $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$,
(b) stopień wielomianu r jest mniejszy od stopnia wielomianu g.

Wielomian q nazywamy ilorazem, a r resztą z dzielenia wielomianu f przez g. Jeśli r jest wielomianem zerowym, to wielomian f jest podzielny przez wielomian g. Łatwo zauważyć, że reszta z dzielenia wielomianu f przez dwumian $(x - c)$ jest równa $f(c)$.

Przykład 1. Wykonaj dzielenie wielomianu $f(x) = x^4 - x^3 - 34x^2 + 57x - 21$ przez wielomian $g(x) = x^2 - 6x + 3$.
Rozwiązanie: Mamy

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x^2 & +5x & -7 & & & & & & \\
\hline
(x^4 & -x^3 & -34x^2 & +57x & -21) & : & (x^2 & -6x & +3) \\
-x^4 & +6x^3 & -3x^2 & & & & & & \\
\hline
 & 5x^3 & -37x^2 & +57x & -21 & & & & \\
 & -5x^3 & +30x^2 & -15x & & & & & \\
\hline
 & & -7x^2 & +42x & -21 & & & & \\
 & & 7x^2 & -42x & +21 & & & & \\
\hline
 & & & & 0 & & & &
\end{array}
$$

W tym przypadku reszta z dzielenia wielomianu f przez wielomian g jest równa zero (jest wielomianem zerowym), a więc wielomian f jest podzielny przez wielomian g. Mamy więc równość:

$$x^4 - x^3 - 34x^2 + 57x - 21 = (x^2 - 6x + 3)(x^2 + 5x - 7).$$

Na początku XIX wieku angielski matematyk W.G. Horner podał algorytm służący do wyznaczania ilorazu i reszty z dzielenia wielomianu przez dwumian $(x - a)$. Algorytm ten nazywa się często **schematem Hornera**.

Lemat 1. *(**schemat Hornera**) Niech $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych i niech $a \in \mathbb{R}$. Niech $g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$ będzie ilorazem z dzielenia wielomianu f przez dwumian $(x - a)$. Wtedy współczynniki wielomianu g spełniają zależności:*
$b_{n-1} = a_n$, $b_k = a_{k+1} + a \cdot b_{k+1}$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n-2$, a reszta jest równa $r = a_0 + a \cdot b_0$.

Definicja 2. Liczba rzeczywista a jest pierwiastkiem wielomianu f wtedy i tylko wtedy, gdy $f(a) = 0$.

Pierwiastek wielomianu f stopnia n jest więc rozwiązaniem równania wielomianowego

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 .$$

Dla $n = 2$ otrzymujemy funkcję kwadratową (trójmian kwadratowy) postaci

$$f(x) = ax^2 + bx + c \ , \ a \neq 0.$$

Liczbę $\Delta = b^2 - 4ac$ nazywamy wyróznikiem trójmianu kwadratowego.
(a) Jeśli $\Delta < 0$, to trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych.
(b) Jeśli $\Delta > 0$, to trójmian kwadratowy ma dwa **rne** pierwiastki rzeczywiste określone wzorami

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \ , \ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} .$$

Mamy wtedy $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Jest to tzw. postać iloczynowa trójmianu kwadratowego.
(c) Jeśli $\Delta = 0$, to trójmian kwadratowy ma pierwiastek dwukrotny (podwójny) dany wzorem

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a} .$$

Mamy wtedy $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

Np. dla trójmianu kwadratowego $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$ mamy $\Delta = 25$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 3$ oraz $2x^2 - 7x + 3 = 2(x - \frac{1}{2})(x - 3)$.
Przy rozwiązywaniu równań i nierówności kwadratowych przydatne są tzw. wzory Viete'a.

Lemat 2. *Jeśli $\Delta \geqslant 0$ i x_1 , x_2 są pierwiastkami równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$, to prawdziwe są równości*

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \ , \ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \ .$$

Definicja 3. Niech $k \in \mathbb{N}$. Liczba rzeczywista a jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu f wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian f jest podzielny przez $(x-a)^k$ i nie jest podzielny przez $(x-a)^{k+1}$.

Np.dla wielomianu $f(x) = (x + 2)^3(x - 5)^2(x^2 + 7)$ liczba -2 jest trzykrotnym pierwiastkiem, a liczba 5 jest dwukrotnym pierwiastkiem.

Twierdzenie 2. *(Bezoute'a) Liczba rzeczywista a jest pierwiastkiem wielomianu f wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian f jest podzielny przez dwumian $(x - a)$, tzn. $f(x) = (x - a) \cdot g(x)$.*

Dowód: ($\Rightarrow$) Załóżmy, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu f. Wtedy $f(a) = 0$. Na mocy wcześniejszego twierdzenia istnieją wielomiany g i r, takie że

$$f(x) = (x - a) \cdot g(x) + r(x),$$

gdzie $st(r) = 0$ lub $r(x) = 0$, tzn. r jest wielomianem stałym (liczbą rzeczywistą) lub wielomianem zerowym. Otrzymujemy stąd
$0 = f(a) = (a - a) \cdot g(a) + r(a)$. Zatem $r = 0$, co oznacza, że $(x - a)$ jest dzielnikiem f.
($\Leftarrow$) Zakładamy teraz, że wielomian f jest podzielny przez dwumian $(x - a)$. Istnieje więc taki wielomian q, że $f(x) = (x - a) \cdot q(x)$. Stąd $f(a) = (a - a) \cdot q(a) = 0 \cdot q(a) = 0$, więc liczba $a \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem wielomianu f .

Niech f będzie wielomianem o **współczynnikach całkowitych.** Wszystkie pierwiastki tego wielomianu, które są liczbami całkowitymi lub liczbami wymiernymi, możemy łatwo wyznaczyć, korzystając z poniższego lematu.

Lemat 3. *Niech $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych takim, że $a_n \neq 0$ i $a_0 \neq 0$. Wówczas,*

(a) jeśli liczba całkowita c jest pierwiastkiem wielomianu f,to c jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 ;
(b) jeśli ułamek nieskracalny $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ jest pierwiastkiem wielomianu f, to p jest dzielnikiem a_0 i q jest dzielnikiem a_n.

Lemat 4. *Niech $n \in \mathbb{N}$. Wielomian n-tego stopnia o współczynnikach rzeczywistych ma co najwyżej n pierwiastków.*

Na zakończenie warto przytoczyć twierdzenie o rozkładzie dowolnego wielomianu o współczynnikach rzeczywistych na iloczyn wielomianów stopnia co najwyżej drugiego.

Lemat 5. *Każdy wielomian f o współczynnikach rzeczywistych stopnia n można zapisać w postaci*

$$f(x) = c(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_s)(x^2 + a_1 x + b_1) \cdot \ldots \cdot (x^2 + a_t x + b_t) \ ,$$

gdzie $c, x_1, \ldots, x_s, a_1, \ldots, a_t, b_1, \ldots, b_t \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ oraz $n = s + 2t$, a wielomiany $x^2 + a_i x + b_i$, $i = 1, 2, \ldots, t$, nie mają pierwiastków rzeczywistych.

Zadania obowiązkowe

Zadanie 1. Wyznacz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu $f(x) = x^4 + 4x^3 + x^2 + 2x + 3$ przez wielomian $g(x) = x^2 + x - 1$.

Szkic rozwiązania. Mamy

$$x^4 + 4x^3 + x^2 + 2x + 3 = x^2(x^2 + x - 1) + (3x^3 + 2x^2 + 2x + 3),$$

$$3x^3 + 2x^2 + 2x + 3 = 3x(x^2 + x - 1) + (-x^2 + 5x + 3),$$

$$-x^2 + 5x + 3 = (-1)(x^2 + x - 1) + (6x + 2),$$

czyli

$$x^4+4x^3+x^2+2x+3 = x^2(x^2+x-1)+3x(x^2+x-1)-(x^2+x-1)+(6x+2) = (x^2+3x-1)(x^2+x-1)+(6x+2).$$

Otrzymujemy stąd, że iloraz $q(x) = x^2 + 3x - 1$, a reszta $r(x) = 6x + 2$. Zauważmy, że $st(r) = 1 < 2 = st(g)$, tzn. stopień reszty jest mniejszy od stopnia dzielnika, ale reszta nie jest wielomianem zerowym, więc wielomian f nie jest podzielny przez wielomian g.

Uwagi metodologiczne.

Uwaga 1. Powyższy algorytm dzielenia wielomianów możemy zapisać w innej postaci, a mianowicie

$$\begin{array}{ccccccc}
x^2 & +3x & -1 & & & & \\
\hline
(x^4 & +4x^3 & +x^2 & +2x & +3) & : & (x^2 + x - 1) \\
-x^4 & -x^3 & +x^2 & & & & \\
\hline
 & 3x^3 & +2x^2 & +2x & +3 & & \\
 & -3x^3 & -3x^2 & +3x & & & \\
\hline
 & & -x^2 & +5x & +3 & & \\
 & & x^2 & +x & -1 & & \\
\hline
 & & & 6x & +2 & &
\end{array}$$

Zadanie 2. Nie wykonując dzielenia, oblicz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu f przez dwumian g, jeśli $f(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 3x - 20$, $g(x) = x + 2$.

Szkic rozwiązania. W celu wyznaczenia ilorazu i reszty z dzielenia wielomianu f przez dwumian g skorzystamy ze schematu Hornera. W naszym przypadku mamy następujące równości:
$a_4 = 1$, $a_3 = -4$, $a_2 = -7$, $a_1 = 3$, $a_0 = -20$ oraz $a = -2$.
Iloraz będzie wielomianem stopnia trzeciego, tzn. $q(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$. Mamy
$b_3 = a_4 = 1$,
$b_2 = ab_3 + a_3 = (-2) \cdot 1 + (-4) = -6$,
$b_1 = ab_2 + a_2 = (-2)(-6) + (-7) = 5$,
$b_0 = ab_1 + a_1 = (-2) \cdot 5 + 3 = -7$,

$r = ab_0 + a_0 = (-2)(-7) + (-20) = -6.$
Otrzymujemy stąd $q(x) = x^3 - 6x^2 + 5x - 7$ oraz $r = -6.$

Zadanie 3. Reszta z dzielenia wielomianu f przez dwumian $(x+4)$ jest równa 4 , a przy dzieleniu przez $(x-2)$ jest równa -2 . Oblicz resztę z dzielenia wielomianu f przez trójmian kwadratowy $(x^2 + 2x - 8)$.

Szkic rozwiązania. Zauważmy, że $(x^2 + 2x - 8) = (x + 4)(x - 2)$. Reszta r z dzielenia wielomianu f przez trójmian kwadratowy jest wielomianem stopnia co najwyżej pierwszego, a więc jest postaci $r(x) = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$. Dzielenie z resztą wielomianu f przez trójmian kwadratowy możemy zapisać w postaci :

$$f(x) = g(x)(x + 4)(x - 2) + (ax + b) ,$$

dla pewnego wielomianu g. Z warunków zadania wiemy, że $f(-4) = 4$ i $f(2) = -2$. Z drugiej strony mamy

$$f(-4) = g(-4) \cdot 0 + (-4a + b)$$

i

$$f(2) = g(2) \cdot 0 + (2a + b) .$$

Otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} -4a + b = 4 \\ 2a + b = -2 \end{cases}$$

Rozwiązaniem jest $a = -1$ i $b = 0$. Zatem szukana reszta $r(x) = -x$.

Zadanie 4. Wyznacz całkowite wartości parametru a , dla których wielomian
$f(x) = x^3 + ax^2 - a^2x + 1$ ma dwa różne pierwiastki całkowite.

Szkic rozwiązania. Zauważmy, że jedynymi pierwiastkami całkowitymi wielomianu f mogą być tylko liczby ± 1. Stąd $f(1) = 0 \Leftrightarrow a - a^2 + 2 = 0$ i $f(-1) = 0 \Leftrightarrow a + a^2 = 0$. Otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} a - a^2 = -2 \\ a + a^2 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem powyższego układu jest $a = -1$.

Zadanie 5. Rozwiąż równanie: $x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 = 0$.

Szkic rozwiązania. Pierwiastkami całkowitymi danego równania mogą być jedynie dzielniki liczby 8, tzn. ± 1 , ± 2 , ± 4 , ± 8 . Oznaczmy $f(x) = x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8$. Mamy $f(1) = 0$, więc $x_1 = 1$ jest pierwiastkiem f . Wobec tego wielomian f jest podzielny przez dwumian $(x-1)$. Korzystamy ze schematu Hornera i otrzymujemy

$$x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 = (x - 1)(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) .$$

Podobnie stwierdzamy, że pierwiastkiem ilorazu $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ jest $x_2 = 2$, a więc wielomian g jest podzielny przez dwumian $(x-2)$. Współczynniki ilorazu obliczamy ze wzorów Hornera i mamy

$$x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 = (x - 1)(x - 2)(x^2 - 4x + 4)$$

Otrzymany trójmian kwadratowy $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Podane w zadaniu równanie jest równoważne równaniu

$$(x-1)(x-2)^3 = 0$$

Zatem liczby $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$ są pierwiastkami danego równania, przy czym $x_2 = 2$ jest pierwiastkiem trzykrotnym.

Zadanie 6. Rozwiąż równanie: $x^6 + 2x^4 - 31x^2 + 28 = 0$.

Szkic rozwiązania. Niech $f(x) = x^6 + 2x^4 - 31x^2 + 28$. Jeśli wielomian f ma pierwiastki całkowite, to należą one do zbioru $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, \pm 14, \pm 28\}$. Nietrudno zauważyć, że niewiadoma x występuje w danym równaniu tylko w potędze o wykładnikach parzystych, więc $f(a) = f(-a)$ i $f(1) = 0$. Stąd również $f(-1) = 0$. Dzielimy wielomian f przez $(x-1)$, a następnie otrzymany iloraz dzielimy przez $(x+1)$, korzystając ze schematu Hornera (lub dzielimy f przez (x^2-1)). Otrzymujemy kolejno

$$x^6 + 2x^4 - 31x^2 + 28 = (x-1)(x^5 + x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 28x - 28) = (x-1)(x+1)(x^4 + 3x^2 - 28) =$$

$$= (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x^2+7),$$

ponieważ liczby± 2 są pierwiastkami wielomianu $g(x) = x^4 + 3x^2 - 28$. Stąd

$$(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x^2+7) = 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 1$ lub $x = -1$ lub $x = 2$ lub $x = -2$, ponieważ $x^2 + 7 > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 7. Rozwiąż nierówność: $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 < 0$.

Szkic rozwiązania.

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = x^3(x+1) - 7x(x+1) + 6(x+1) = (x+1)(x^3 - 7x + 6) = (x+1)(x-1)(x^2 + x - 6) =$$

$$= (x+1)(x-1)(x+3)(x-2)$$

Stąd

$$(x+3)(x+1)(x-1)(x-2) < 0$$

Powyższą nierówność możemy rozwiązać budując tzw. siatkę znaków lub metodą graficzną. Oznaczmy $f(x) = (x+3)(x+1)(x-1)(x-2)$.

1. **Siatka znaków.**

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Z tabeli odczytujemy,że $f(x) < 0$ dla $x \in (-3, -1) \cup (1, 2)$.

2.**Metoda graficzna.**

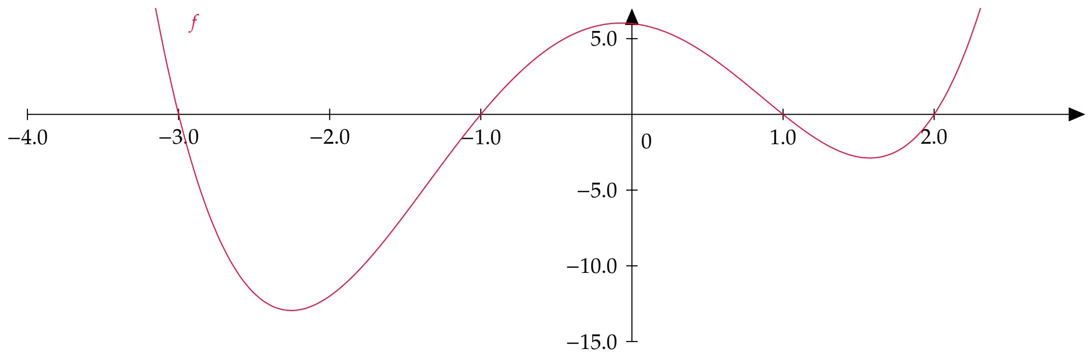
Metoda graficzna polega na wykreśleniu pewnej krzywej, tzw. ”fali”, która nie jest jednak dokładnym wykresem wielomianu f. Krzywa ta musi przechodzić przez wszystkie miejsca zerowe wielomianu f, ale poza nimi nie musimy obliczać i zaznaczać dokładnych wartości wielomianu, ponieważ w każdym z otrzymanych przedziałów funkcja f jest stałego znaku (dodatnia albo ujemna). W celu otrzymania poprawnego "wykresu" postępujemy jak niżej:

(a) Na osi OX zaznaczamy wszystkie miejsca zerowe wielomianu f. Oś OY można pominąć.
(b) Wykres krzywej zaczynamy od prawej strony z góry (nad osią OX), jeżeli współczynnik przy najwyższej potędze wielomianu f jest dodatni. W przeciwnym wypadku wykres zaczynamy od dołu (pod osią OX).
(c) Przy przejściu przez miejsce zerowe, które jest pierwiastkiem o krotności, będącej liczbą nieparzystą $1, 3, 5, \ldots$, funkcja zmienia znak z dodatniego na ujemny lub na odwrót.
(d) Przy przejściu przez miejsce zerowe, które jest pierwiastkiem o krotności, będącej liczbą parzystą $2, 4, 6, \ldots$, funkcja nie zmienia znaku i w tym punkcie następuje tzw. odbicie krzywej (nie przecina ona osi OX lecz jest styczna do osi w tym punkcie).
(e) Z otrzymanego wykresu odczytujemy przedziały, w których wielomian f przyjmuje wartości dodatnie (nieujemne) lub ujemne (niedodatnie).

W naszym przypadku mamy nierówność:

$$(x + 3)(x + 1)(x - 1)(x - 2) < 0$$

Zauważmy, że wszystkie pierwiastki są jednokrotne, a "wykres" zaczynamy od góry (z prawej strony od ostatniego miejsca zerowego), ponieważ współczynnik przy najwyższej potędze jest równy $1 > 0$.



Z powyższego wykresu odczytujemy, że podana nierówność jest spełniona dla $x \in (-3, -1) \cup (1, 2)$.

Zadanie 8. Rozwiąż nierówność: $(1 - 2x)^3(3x + 2)^2(x - \frac{1}{2}) \geqslant 0$.

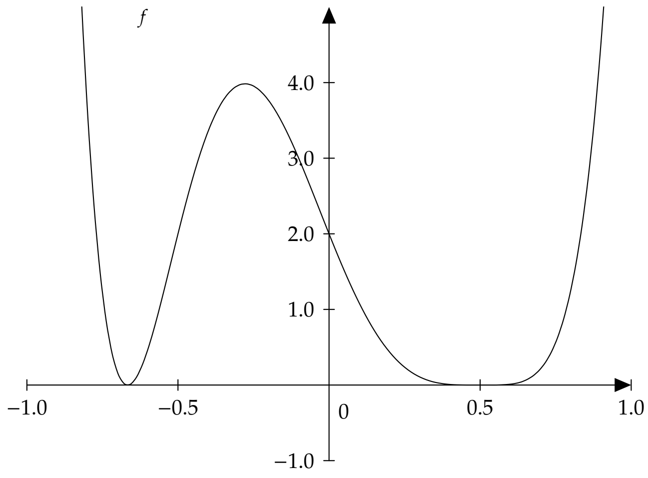
Szkic rozwiązania.

$$(-2)^3(x - \frac{1}{2})^3 \cdot 3^2(x + \frac{2}{3})^2(x - \frac{1}{2}) \geqslant 0$$

$$-72 \cdot (x - \frac{1}{2})^4(x + \frac{2}{3})^2 \geqslant 0$$

$$(x - \frac{1}{2})^4(x + \frac{2}{3})^2 \leqslant 0$$

Obydwa wykładniki potęg są parzyste, więc każdy z czynników jest nieujemny dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Zatem jedynymi rozwiązaniami ostatniej nierówności są liczby $x = \frac{1}{2}$ lub $x = -\frac{2}{3}$. Rozwiązanie powyższe uzyskamy również posługując się metodą graficzną.Miejscami zerowymi wielomianu w ostatniej nierówności są $\frac{1}{2}$ i $-\frac{2}{3}$, przy czym obydwa miejsca zerowe są krotności parzystej, więc w tych punktach nastąpi odbicie "wykresu", co obrazuje poniższy rysunek.



Zadania dodatkowe

Zadanie 9. Dla jakich wartości parametru m pierwiastki x_1 i x_2 równania

$$\frac{mx}{m-1} + \frac{m+1}{x} = x + 1$$

spełniają nierówność: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 2m + 1$?

Szkic rozwiązania. Zakładając, że $m \neq 1$ i $x \neq 0$ zapisujemy dane równanie w postaci

$$x^2 + (1-m)x + m^2 - 1 = 0 .$$

Aby powyższe równanie miało dwa pierwiastki x_1 i x_2, musi być spełniony warunek

$$\Delta = -3m^2 - 2m + 5 \geqslant 0 \tag{1}$$

Mamy

$$-3m^2 - 2m + 5 = -3(m-1)(m + \frac{5}{3}) ,$$

więc rozwiązaniem nierówności (1) jest zbiór $m \in \left[-\frac{5}{3}\ ,\ 1\right]$.
Ze wzorów Viete'a otrzymujemy

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{m-1}{m^2-1} = \frac{1}{m+1},$$

więc warunek podany w zadaniu przyjmie postać

$$\frac{1}{m+1} < 2m + 1 \tag{2}$$

Nierówność (2) jest równoważna nierówności

$$2m(m + \frac{3}{2})(m+1) > 0 ,$$

której rozwiązaniem jest zbiór $m \in \left(-\frac{3}{2}\,,\ -1\right) \cup (0\,,\ +\infty)$.
Rozwiązaniem zadania są liczby m , które spełniają jednocześnie nierówności (1) i (2) i warunek $m \neq 1$, a więc ostatecznie $m \in \left(-\frac{3}{2}\,,\ -1\right) \cup (0\,,\ 1)$.

Uwagi metodologiczne. Przy rozwiązywaniu nierówności należy pamiętać o tym, że **nie wolno !!!** obustronnie mnożyć nierówności przez wyrażenie, które nie jest stałego znaku w dziedzinie, a także o tym, że

$$\frac{a}{b} \leqslant 0\ (\geqslant 0) \ \Leftrightarrow a \cdot b \leqslant 0\ (\geqslant 0).$$

Uwaga 2. Jeśli tego typu zadania były (będą) rozwiązywane w temacie "Funkcja kwadratowa",to zadanie to należy pominąć.

Zadanie 10. Wyznacz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 4x - 5$ przez wielomian $g(x) = x^2 + 3x - 2$.

Szkic rozwiązania. Wykonujemy dzielenie wielomianów metodą przedstawioną w pierwszym zadaniu.

Zadanie 11. Rozwiąż równanie: $16x^4 - 24x^3 - 2x + 3 = 0$.

Szkic rozwiązania. Mamy

$$8x^3(2x-3) - (2x-3) = 0$$
$$(2x-3)(8x^3-1) = 0$$
$$2(x-\frac{3}{2})(2x-1)(4x^2+2x+1) = 0$$
$$4(x-\frac{3}{2})(x-\frac{1}{2})(4x^2+2x+1) = 0$$

Ponieważ wyróżnik trójmianu kwadratowego $4x^2+2x+1$ jest równy $\Delta = -12 < 0$, to $4x^2+2x+1 > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Otrzymujemy więc $x = \frac{3}{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$.

Uwagi metodologiczne. Najpierw grupujemy wyrazy w podanym równaniu i wyłączamy wspólny czynnik, a następnie korzystamy z wzoru skróconego mnożenia $(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Zadanie 12. Rozwiąż równanie: $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = 0$.

Szkic rozwiązania. Sprawdzamy, czy wielomian f występujący w powyższym równaniu ma pierwiastki całkowite. Mogą to być jedynie dzielniki wyrazu wolnego, a więc należą do zbioru $\{\pm1, \pm2, \pm4\}$.
Mamy $f(1) = 18 \neq 0$, $f(-1) = 0$, co oznacza, że liczba -1 jest pierwiastkiem wielomianu f, a więc wielomian jest podzielny przez dwumian $(x+1)$. Współczynniki ilorazu g z dzielenia wielomianu f przez dwumian $(x+1)$ wyznaczamy korzystając ze schematu Hornera. Otrzymujemy:

$$x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = (x+1) \cdot (x^3 + 2x^2 + 2x + 4)$$

Podobnie, jeśli wielomian g stopnia trzeciego ma pierwiastki całkowite, to należą do zbioru $\{\pm1, \pm2, \pm4\}$. Otrzymujemy $g(-2) = 0$, tzn. liczba -2 jest pierwiastkiem wielomianu g , a więc jest on podzielny przez dwumian $(x+2)$. Współczynniki ilorazu wyznaczamy ze wzorów Hornera i otrzymujemy:

$$x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x^2 + 2)$$

Równanie wyjściowe możemy zapisać w postaci:

$$(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x^2+2) = 0$$

Stąd

$$x + 1 = 0 \ \ lub \ \ x + 2 = 0 \ \ lub \ \ x^2 + 2 = 0.$$

Ponieważ $x^2 + 2 > 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, to rozwiązaniami równania są $x = -1$ i $x = -2$.

Zadanie 13. Rozwiąż równanie: $x^{13} - x^{12} - x^7 + x^6 = 0$.

Szkic rozwiązania.

$$x^{12}(x - 1) - x^6(x - 1) = 0$$

$$x^6(x - 1)(x^6 - 1) = 0$$

$$x^6(x - 1)(x^3 - 1)(x^3 + 1) = 0$$

$$x^6(x - 1)^2(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

Wyróżnik $\Delta = -3$ dla obydwu trójmianów kwadratowych, więc $x^2 \pm x + 1 > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Pierwiastkami równania są więc liczby: $x = 0$ - sześciokrotny, $x = 1$ - dwukrotny , $x = -1$.

Uwagi metodologiczne. W celu otrzymania postaci iloczynowej wielomianu występującego w równaniu najpierw grupujemy wyrazy, wyłączamy wspólne czynniki, a następnie korzystamy z wzorów skróconego mnożenia (różnica kwadratów,suma sześcianów i różnica sześcianów).

Zadanie 14. Rozwiąż nierówność: $2x^3 - 5x^2 - 2x + 5 > 0$.

Szkic rozwiązania. Mamy

$$2x^3 - 5x^2 - 2x + 5 = 2x^2(x - \frac{5}{2}) - 2(x - \frac{5}{2}) = 2(x - \frac{5}{2})(x^2 - 1) = 2(x - \frac{5}{2})(x - 1)(x + 1)$$

Otrzymujemy nierówność

$$(x - \frac{5}{2})(x - 1)(x + 1) > 0$$

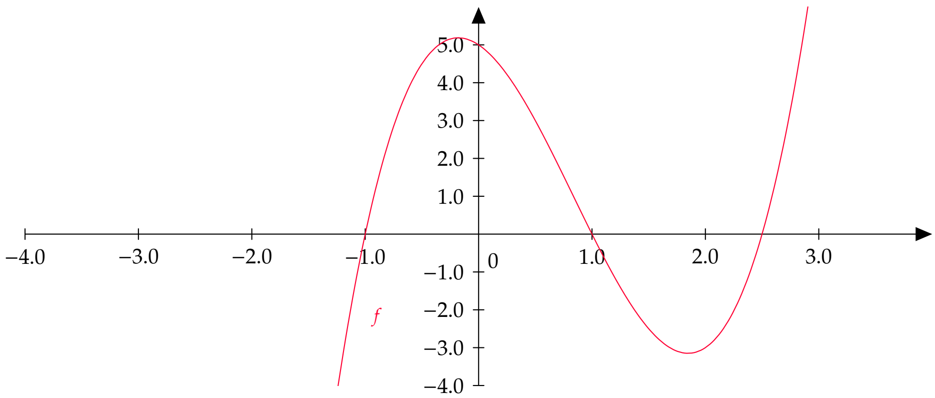
Oznaczmy $f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - \frac{5}{2})$. Budujemy siatkę znaków.

1. **Siatka znaków.**

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \frac{5}{2})$	$\frac{5}{2}$	$(\frac{5}{2}, +\infty)$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - \frac{5}{2}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Z tabeli odczytujemy, że nierówność jest spełniona dla $x \in (-1, 1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$.

2.**Metoda graficzna.**



Zadanie 15. Rozwiąż nierówność: $(12x^3 - 16x^2 + 7x - 1)^{10}(-10x^2 + 3x + 1)^5 > 0$.

Szkic rozwiązania. Zauważmy, że $(12x^3 - 16x^2 + 7x - 1)^{10} \geqslant 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, więc dana nierówność jest równoważna nierówności $(-10x^2 + 3x + 1)^5 > 0$ z wyłączeniem ze zbioru jej rozwiązań miejsc zerowych pierwszego czynnika, tzn. pierwiastków wielomianu $f(x) = 12x^3 - 16x^2 + 7x - 1$. Jednym z pierwiastków wymiernych wielomianu f jest $x = \frac{1}{3}$, ponieważ $f(\frac{1}{3}) = 0$. Otrzymujemy rozkład

$$12x^3 - 16x^2 + 7x - 1 = (x - \frac{1}{3})(12x^2 - 12x + 3) = 12 \cdot (x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2})^2.$$

Pierwiastkami wielomianu f są więc liczby $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$.
Dalej mamy

$$(-10x^2 + 3x + 1)^5 > 0 \;\Leftrightarrow\; (-10x^2 + 3x + 1 > 0)$$

Dla powyższego trójmianu kwadratowego wyróżnik $\Delta = 49$, pierwiastki $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{5}$, co daje nierówność

$$-10 \cdot (x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{5}) > 0$$

Rozwiązaniem ostatniej nierówności jest zbiór $x \in (-\frac{1}{5}, \frac{1}{2})$. Jednak $x = \frac{1}{3} \in (-\frac{1}{5}, \frac{1}{2})$, więc rozwiązaniem podanej nierówności jest zbiór $(-\frac{1}{5}, \frac{1}{2}) \backslash \{\frac{1}{3}\}$.

Zadania domowe

Zadanie 16. Dla jakich wartości parametru m równanie

$$(m + 1)x^2 - 4mx + m + 1 = 0$$

ma dwa różne pierwiastki dodatnie ?

Zadanie 17. Wyznaczyć takie liczby a i b , aby wielomian $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + ax + b$ był podzielny przez dwumian $(x^2 - 1)$.

Zadanie 18. Rozwiąż równanie: $x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 12x + 9 = 0$.

Zadanie 19. Rozwiąż nierówność: $(x - 4)(x^2 + 5x - 6)(-x^2 + 2x + 1) < 0$.

Zadanie 20. Rozwiąż nierówność: $-x^4 + 5x^3 - 5x^2 - x + 2 \geqslant 0$.

Odpowiedzi:

1.12. $q(x) = x^2 + 3x - 1$, $r(x) = 6x + 2$

1.14. $q(x) = x^3 - 6x^2 + 5x - 7$ oraz $r = -6$.

1.15. $r(x) = -x$.

1.16. $a = -1$.

1.17. $x_1 = 1$ *i* $x_2 = 2$ - pierwiastek trzykrotny .

1.18. $x \in \{\pm 1, \pm 2\}$.

1.19. $x \in (-3, -1) \cup (1, 2)$.

1.20. $x \in \{-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\}$.

1.21. $m \in \left(-\frac{3}{2}\ ,\ -1\right) \cup (0\ ,\ 1)$.

1.23. $q(x) = 2x^2 - 3x + 12$, $r(x) = -38x + 19$.

1.24. $x = \frac{1}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}$.

1.25. $x = -1$ lub $x = -2$.

1.26. $x = 0$-sześciokrotny ; $x = 1$-dwukrotny ; $x = -1$.

1.27. $x \in (-1, 1) \cup (\frac{5}{2}; +\infty)$.

1.28. $x \in (-\frac{1}{5}; \frac{1}{2}) \backslash \{\frac{1}{3}\}$.

1.29. $m \in (-\infty\ ,\ -1) \cup (1\ ,\ \infty)$.

1.30. $a = 3$, $b = -7$.

1.31. $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -3 - 2\sqrt{3}$, $x_4 = -3 + 2\sqrt{3}$.

1.32. $x \in (-6, 1 - \sqrt{2}) \cup (1, 1 + \sqrt{2}) \cup (4, +\infty))$.

1.33. $x \in [\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}]$.

Literatura

(a) A. Zalewska, E. Stachowski, M. Szurek, I ty zostaniesz Euklidesem, Podręcznik do matematyki dla klasy I, II, III liceum i technikum, Oficyna Wydawniczo-Poligraficzna "ADAM", Warszawa 2004.

(b) A. Zalewska, E. Stachowski, I ty zostaniesz Euklidesem, Zbiór zadań z matematyki dla klas I, II, III liceum i technikum, Oficyna Wydawniczo-Poligraficzna "ADAM", Warszawa 2004.

(c) B. Gdowski, E. Pluciński, Zbiór zadań z matematyki dla kandydatów na wyższe uczelnie, WNT, Warszawa 1979.

(d) N. Dróbka, K. Szymański, Zbiór zadań z algebry dla klasy I i II liceum ogólnokształcącego, WSiP, Warszawa 1971.

(e) N. Dróbka, K. Szymański, Zbiór zadań z matematyki dla klasy III i IV liceum ogólnokształcącego, PZWS, Warszawa 1973.

(f) R. Pawlak, A.Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak, Matematyka krok po kroku, Nowa matura, Zbiór zadań cz.I, RES POLONA, Łódź 2004.

(g) R. Pawlak, A.Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak, Matematyka krok po kroku, Nowa matura, Zbiór zadań cz.II, RES POLONA, Łódź 2004.

(h) A. Ciszkowska, A. Przychoda, Z. Łaszczyk, Matematyka, Zbiór zadań dla liceum i technikum klasy 1-3, WSiP, Warszawa 2010.