Ćwiczenia 2 - Przestrzenie probabilistyczne

A Teoria

Definicja A.1. Niech X będzie zbiorem a $\mathcal{A}$ pewną rodziną podzbiorów zbioru X, tzn. $\mathcal{A} \subset 2^X$. Wówczas $\mathcal{A}$ nazywamy σ-algebrą jeśli zachodzą następujące warunki:

1. $X \in \mathcal{A}$;
2. jeśli $Y \in \mathcal{A}$, to $X \setminus Y \in \mathcal{A}$;
3. jeśli $\{Y_n\}$ jest ciągiem podzbiorów zbioru X i dla każdego n, $Y_n \in \mathcal{A}$, wówczas $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$.

Definicja A.2. *Przestrzenią probabilistyczną* nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie zbiór $\Omega \neq \emptyset$ stanowi *przestrzeń zdarzeń elementarnych*, $\mathcal{F}$ jest σ-algebrą określoną na zbiorze Ω, zwaną *przestrzenią zdarzeń losowych*, a $\mathbb{P}$ jest *miarą probabilistyczną* określoną na $\mathcal{F}$, tzn. $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ jest funkcją spełniającą następujące warunki:

1. $\mathbb{P}$ jest nieujemna, tj. $\mathbb{P}(A) \geqslant 0$, $\forall A \in \mathcal{F}$;
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
3. $\mathbb{P}$ jest *przeliczalnie addytywna*, tzn. dla każdej przeliczalnej rodziny $\{A_n\}$ parami rozłącznych zbiorów $A_n \in \mathcal{F}$ zachodzi $\mathbb{P}\left(\bigcup A_n\right) = \sum \mathbb{P}(A_n)$.

Twierdzenie A.3 (Własności prawdopodobieństwa)**.**

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
2. $\mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A)$;
3. Jeśli $A \subseteq B$, to $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$;
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;
5. $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$;
6. $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - (\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$;
7. Dla dowolnych n wzajemnie wykluczających się zdarzeń $A_1, A_2, \ldots, A_n$:
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i);$$
8. $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$;
9. $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

B Zadania na ćwiczenia

Zadanie B.1. W urnie znajduje się 30 ponumerowanych kul. Losujemy bez zwracania 5 kul. Opisz przestrzeń probabilistyczną dla tego eksperymentu.

Zadanie B.2. Zbuduj model przestrzeni probabilistycznej dla eksperymentu polegającego na jednoczesnym rzucie symetrczyną kostką i rzucie symetryczną monetą.

Zadanie B.3. W urnie znajduje się 10 kul czarnych i 20 kul czerwonych. Losujemy bez zwracania 5 kul. Opisz przestrzeń probabilistyczną opisującą ten eksperyment.

Zadanie B.4. Rozważamy eksperyment polegający na 10-krotnym rzucie symetryczną monetą. Interesuje nas liczba wylosowanych orłów. Opisz przestrzeń probabilistyczną dla tego eksperymentu. (Rozważ dwie możliwe przestrzenie: jedną, w której przestrzeń zdarzeń elementarnych stanowią ciągi, oraz drugą, w której przestrzeń zdarzeń stanowią wyniki eksperymentu, czyli iczba wyrzuconych orłów).

Zadanie B.5. Niech $\mathbb{P}(A \cap B') = \frac{7}{20}$, $\mathbb{P}(B \setminus A) = \frac{5}{20}$ oraz niech $\mathbb{P}(A \cup B) = 7 \cdot \mathbb{P}(A \cap B)$. Oblicz $\mathbb{P}(A)$ i $\mathbb{P}(B)$.

Zadanie B.6. Pokaż, że dla dowolnych dwóch zdarzeń losowych A i B zachodzi $\mathbb{P}(A \cup B) \leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Zadanie B.7. Niech $A \cup B \cup C = \Omega$, $\mathbb{P}(B) = 2 \cdot \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(C) = 3 \cdot \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C)$. Udowodnij, że $1/6 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1/4$ i że oba ograniczenia są optymalne.

Zadanie B.8. Rzucamy obciążoną kostką do gry, dla której szóstka wypada 2 razy częściej niż jedynka, a szansa wypadnięcia dla każdej z pozostałych liczb oczek wynosi 1/6. Zbuduj model przestrzeni probabilistycznej dla tego doświadczenia. Jaka jest szansa wyrzucenia liczby parzystej?

Zadanie B.9. Niech A, B, C będą zdarzeniami losowymi w tej samej przestrzeni probabilistycznej. Zapisz za pomocą działań na zbiorach następujące zdarzenia:

1. zachodzi dokładnie jedno ze zdarzeń A, B, C;
2. zachodzą dokładnie dwa zadzrenia spośród A, B, C;
3. zachodzą co najmniej dwa zdarzenia spośród A, B, C;
4. zajdą nie więcej niż dwa zdarzenia spośród A, B, C.

C Zadania domowe

Zadanie C.1. Z talii 52 kart losujemy bez zwracania trzy karty. Interesuje nas liczba wyciągniętych pików. Opisz dwie przestrzenie probabilistyczne dla tego eksperymentu, jedną, w której zdarzeniami elementarnymi są wyciągnięte karty oraz drugą, w której zdarzenia elementarne to liczba wyciągniętych pików.

Zadanie C.2. Dane są zdarzenia A i B w tej samej przestrzeni probabilistycznej. Udowodnij, że $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(A \cup B)$.

Zadanie C.3. Niech $\mathbb{P}(A) = 3/4$ i $\mathbb{P}(B) = 1/3$. Udowodnij, że $1/12 \leqslant \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant 1/3$ i podaj przykłady, gdy te oszacowania są osiągnięte. Oszacuj podobnie $\mathbb{P}(A \cup B)$.

Zadanie C.4. Udowodnij, że jeśli $A \cap B \subset C$, to $\mathbb{P}(C) \geqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$.

D Odpowiedzi do zadań domowych

B.7 Korzystamy z następującej nierówności: $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \geqslant 0$. Wówczas mamy:

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\ &\geqslant \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) = 5\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \geqslant 4\mathbb{P}(A). \end{aligned}$$

Nierówność osiągnięta, gdy $A = A \cap B = A \cap C$. W drugą stronę mamy:

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\ &\leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 6\mathbb{P}(A). \end{aligned}$$

Nierówność osiągnięta, gdy $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$.

C.1. $\Omega_1 = 3$-elementowe podzbiory zbioru 52 kart, $|\Omega_1| = \binom{52}{3}$, $\mathcal{F}_1 = 2^{\Omega_1}$, dla $x \in \Omega_1$ mamy $\mathbb{P}(x) = 1/\binom{52}{3}$
$\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3\}$, $|\Omega_2| = 4$, $\mathcal{F}_2 = 2^{\Omega_2}$, dla $x \in \Omega_2$ mamy $\mathbb{P}(x) = \binom{13}{x}\binom{39}{3-x}/\binom{52}{3}$
C.2. $(A \cap B \subseteq A) \Rightarrow (\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A))$, $(A \subseteq A \cup B) \Rightarrow (\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(A \cup B))$
C.3. $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\} = 1/3$, oszacowanie jest osiągnięte, gdy $A \cap B = B$;
$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \geqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 = 1/12$, oszacowanie jest osiągnięte, gdy $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$;
$1 \geqslant \mathbb{P}(A \cup B) \geqslant \max\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\} = 3/4$, pierwsza nierówność osiągnięta dla $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$, np. gdy $A \cup B = \Omega$, druga gdy $A \subseteq B$.
C.4. $1 \geqslant \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \geqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(C)$