Warunkowa wartość oczekiwana i martyngały

W tej części notatek wszystkie rozpatrywane zmienne losowe są dyskretne (analogiczne pojęcia można zdefiniować dla zmiennych losowych bez tego dodatkowego założenia, ale jest to nieco dłuższe i bardziej skomplikowane).

Definicja. *Niech* (X, Y) *będzie dwuwymiarową zmienną losową dyskretną, a* $\{x_i\}_{i\in I}$ *zbiorem atomów o mierze niezerowej zmiennej losowej* X*. Wtedy warunkowa wartość oczekiwana* $Z = \mathbb{E}(Y|X)$ *jest zmienną losową, która dla dowolnego* $\omega \in \Omega$ *takiego, że* $X(\omega) = x_i$ *przyjmuje wartość*

$$Z(\omega) = \mathbb{E}(Y|X = x_i) = \sum_y y\,\mathbb{P}\,(Y = y|X = x_i) = \sum_y y\,\frac{\mathbb{P}\,(Y = y, X = x_i)}{\mathbb{P}\,(X = x_i)}\,.$$

Nietrudno zauważyć (i udowodnić!), następujący fakt.

Twierdzenie. $\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(Y|X)\big) = \mathbb{E}Y$*.*

Zauważmy, że rozkład zmiennej losowej $\mathbb{E}(Y|X)$ zależy wyłącznie od zmiennej losowej Y i podziału jaki generuje zmienna X dzieląc przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω na zdarzenia o niezerowej mierze. Dlatego często warunkową wartość oczekiwaną wprowadzamy w sposób następujący.

Definicja. *Niech* $\mathcal{F} = F_1 \cup F_2 \cup \ldots$ *będzie podziałem przestrzeni* Ω *na co najwyżej przeliczalną liczbę zdarzeń, z których każde ma niezerową miarę, a* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *będzie zmienną losową określoną na tej przestrzeni. Wtedy* **warunkowa wartość oczekiwana** $Z = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ *jest zmienną losową przyjmującą wartość*

$$Z(\omega) = \sum_x x\,\mathbb{P}\,(X = x|F_i) = \sum_x x\,\frac{\mathbb{P}\,(\{X = x\} \cap F_i)}{\mathbb{P}\,(F_i)}$$

dla wszystkich $\omega \in F_i$*.*

Definicja. Filtracją *przestrzeni probabilistycznej* $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ *jest ciąg podziałów tej przestrzeni* $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_t$ *na zdarzenia o niezerowej mierze taki, że*

i) $\mathcal{F}_0 = \{\Omega\}$,
ii) *dla każdego* $i = 1, 2, \ldots, t$*, podział* $\mathcal{F}_i$ *jest podpodziałem podziału* $\mathcal{F}_{i-1}$*, tzn. każde zdarzenie należące do* $\mathcal{F}_i$ *jest podzbiorem pewnego zdarzenia należacego do* $\mathcal{F}_{i-1}$*.*

Definicja. *Niech* X *będzie zmienną losową dyskretną o atomach* x_i*, a* $\mathcal{F}_t$ *będzie podziałem* $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ *na zdarzenia* $F_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\}$*. Ponadto, niech* $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_t$ *będzie filtracją przestrzeni* Ω*. Wtedy ciąg zmiennych losowych*

$$X_0 = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_0),\ X_1 = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1),\ \ldots\ ,\ X_t = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)$$

nazywamy **martyngałem Dooba**.

Zauważmy, że jeśli $X_0, X_1, \ldots, X_t$ jest martyngałem Dooba generowanym przez zmienną losową X, to $\mathbb{P}\left(X_0 = \mathbb{E}X\right) = 1$, $X_t = X$ i dla każdego $i = 1, 2, \ldots, t$, mamy

$$X_{i-1} = \mathbb{E}(X_i | X_{i-1}) = \mathbb{E}(X | X_{i-1})\,.$$

Twierdzenie (Twierdzenie Azumy)**.** *Niech* $\mathbb{E}X = X_0, X_1, \ldots, X_t = X$ *będzie martyngałem Dooba takim, że*

$$|X_i - X_{i-1}| \leqslant c_i$$

dla pewnych stałych c_i*, gdzie* $i = 1, 2, \ldots, t$*. Wtedy dla dowolnej stałej* a *zachodzi*

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}X| \geqslant a\right) \leqslant 2\exp\Big(-\frac{a^2}{\sum_{i=1}^{t} c_i^2}\Big)\,.$$