TEORIA RAMSEY'A

15 czerwca 2007

1 Wstęp

Motto 1: „Wśród trojga zwykłych ludzi zawsze jest dwoje tej samej płci."
Motto 2: „Każdy system posiada podsystem o wyższym stopniu zorganizowania."

Notacja: $[r] = \{1, 2, \ldots, r\}$, $\binom{S}{k}$ – zbiór wszystkich k-elementowych pozdbiorów zbioru S.

Terminologia: Funkcję $\chi : S \to [r]$ nazywamy kolorowaniem, a zbiory $\chi^{-1}(i)$ i ich podzbiory – zbiorami monochromatycznymi.

Twierdzenie 1 (Zasada szufladkowa) *Dla wszystkich naturalnych $r, l_1, \ldots, l_r$, jesli $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$ i $|X| \geq l_1 + \cdots + l_r - r + 1$ to istnieje $i \in [r]$ takie, że $|X_i| \geq l_i$.*

Równoważnie, dla każdego kolorowania $\chi : X \to [r]$ istnieje $i \in [r]$ takie, że $|\chi^{-1}(i)| \geq l_i$.

Zadanie Domowe 1 Pokazać, że każde 2-kolorowanie całkowitoliczbowych punktów w $\Re^2$ prowadzi do powstania monochromatycznego prostokąta.

Notacja „strzałkowa" Erdősa i Rado: $n \to (l_1, \ldots, l_r)^k$, gdy dla każdego podziału $\binom{[n]}{k} = X_1 \cup \cdots \cup X_r$ istnieją $i \in [r]$ oraz $T \subseteq [n]$ mocy $|T| = l_i$ takie, że $\binom{T}{k} \subseteq X_i$.

Gdy $l_1 = \cdots = l_r$, to piszemy $n \to (l)^k_r$. Gdy $r = 2$ lub $k = 2$, to opuszczamy ten indeks.

Zadanie 1 $6 \to (3)$

Zadanie Domowe 2 $10 \to (4, 3)$

Własności notacji „$\to$”:
(a) monotoniczność (rosnąca dla n, malejąca dla $l_1, \ldots, l_r$)
(b) symetria
(c) $n \to (l_1, \ldots, l_r) \quad \Leftrightarrow \quad n \to (l_1, \ldots, l_r, 2)$ (w szczególności, $l \to (l, 2)$ bo $l \to (l)_1$)

2 Twierdzenie Ramsey'a dla par

Twierdzenie 2 (Ramsey, 1930) *Dla wszystkich $r, l_1, \ldots, l_r$ istnieje n takie, że $n \to (l_1, \ldots, l_r)$.*

Dwa dowody dla $r = 2$.

Dowód 1: Indukcja względem $l_1 + l_2$. Gdy $l_1 = 2$ to $l_2 \to (2, l_2)$. Dalszy dowód dla $l_1, l_2 \geq 3$. Niech $n_1 \to (l_1 - 1, l_2)$ i $n_2 \to (l_1, l_2 - 1)$. Pokażemy, że $n = n_1 + n_2 \to (l_1, l_2)$. ... ■

Zadanie Domowe 3 *Powtórzyc dowód 1 dla $r > 2$.*

Dowód 2: Niech $l = \max(l_1, l_2)$. Pokażemy, że $2^{2l-1} - 1 \to (l)$. ... ■

Zadanie Domowe 4 Powtórzyc dowód 2 dla $r > 2$.

Wersja grafowa: $G = (V, E)$, $E \subseteq \binom{V}{2}$, $G^c = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$ (dopełnienie grafu G). Graf pełny – $E = \binom{V}{2}$, notacja – K_l, gdzie $l = |V|$. Kolorowanie par ze zbioru $[n]$ dwoma kolorami wyznacza graf (kolor 1) i jego dopełnienie (kolor 2). Dowolny graf na n wierzchołkach oznaczamy przez G_n.

Twierdzenie 3 (Grafowa wersja tw. Ramsey'a) *Dla wszystkich a, b istnieje n takie, że $G_n \supseteq K_a$ lub $G_n \supseteq K_b^c$ (równoważnie, $G_n^c \supseteq K_b$).* ■

2.1 „Zastosowania”

Twierdzenie 4 (Lemat Dilwortha) *Każdy poset o $ab + 1$ elementach zawiera $(a + 1)$-elementowy łańcuch lub $(b + 1)$-elementowy antyłańcuch.* ■

Z tw. Ramsey'a wynika tylko, że istnieje $n = n(a, b)$ takie, że każdy poset o n elementach zawiera $(a + 1)$-elementowy łańcuch lub $(b + 1)$-elementowy antyłańcuch. Jak? Niech $n \to (a, b)$. Pokolorujmy

$$\chi(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } x < y \text{ lub } x > y \\ 2 \text{ w przeciwnym razie .} \end{cases}$$

Wtedy $\chi\left(\binom{T}{2}\right) = 1$ oznacza, że T jest łańcuchem, a $\chi\left(\binom{T}{2}\right) = 2$ oznacza, że T jest antyłańcuchem.

Twierdzenie 5 (Erdős-Szekeres, 1935) *Każdy ciąg rzeczywisty o $ab + 1$ elementach zawiera $(a+1)$-elementowy podciąg rosnący lub $(b+1)$-elementowy podciąg malejący.* ■

Z tw. Ramsey'a wynika tylko, że istnieje $n = n(a, b)$ takie, że każdy ciąg rzeczywisty o n elementach zawiera $(a + 1)$-elementowy podciąg rosnący lub $(b + 1)$-elementowy podciąg malejący. Jak? Niech $n \to (a, b)$. Pokolorujmy wszystkie pary $\{i, j\}$, $i < j$,

$$\chi(i, j) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } a_i \leq a_j \\ 2 \text{ w przeciwnym razie .} \end{cases}$$

Twierdzenie 6 (Erdős-Moser, 1964) *Dla każdego $k \geq 1$, każdy turniej o $n \geq 2^{k-1}$ wierzchołkach zawiera tranzytywny podturniej rzędu k.* ■

Z tw. Ramsey'a wynika tylko, że istnieje $n = n(k)$ takie, że każdy turniej T o n wierzchołkach zawiera tranzytywny podturniej rzędu k. Jak? Niech $n \to (k)$. Pokolorujmy wszystkie pary $\{i, j\}$, $i < j$,

$$\chi(i, j) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } (i, j) \in T \\ 2 \text{ w przeciwnym razie .} \end{cases}$$

Przeformułowanie: Niech $v(n)$ będzie największą liczba naturalną taką, że każdy turniej T_n zawiera tranzytywny podturniej $T_{v(n)}$. Wtedy $v(n) \geq \log_2 n + 1$.

Twierdzenia 4 i 5 są najlepsze możliwe, twierdzenie 6 raczej nie.

Zadanie Domowe 5 Udowodnić, że w każdym turnieju i przy każdym kolorowaniu jego łuków dwoma kolorami istnieje wierzchołek, z którego można dotrzeć do każdego wierzchołka wzdłuż monochromatycznej, skierowanej ścieżki.

Zadanie 2 Kwadratowa macierz 0-1 jest typu $1 \setminus 0$, gdy wszystkie elementy pod główną przekątną sa równe 1, a nad 0 (na przekątnej dowolnie). Podobnie definiujemy typy $0 \setminus 0, 0 \setminus 1, 1 \setminus 1$. Pokazac, że dla każdego m istnieje n takie, że każda 0-1 macierz kwadratowa rzędu n zawiera podmacierz główną (wiersze i kolumny o tych samych numerach) rzędu m jednego z typów $0 \setminus 0, 1 \setminus 0, 0 \setminus 1$ lub $1 \setminus 1$.

3 Twierdzenia Schura i Van der Waerdena

Powracamy do kolorowania elementów ($k = 1$), ale dodajemy strukture arytmetyczną, tzn. malujemy (dzielimy) liczby naturalne.

3.1 Twierdzenie Schura i Wielkie twierdzenie Fermata w wersji modulo

Twierdzenie 7 (Schur, 1916) *Dla wszystkich r istnieje s takie, że dla każdego $\chi : [s] \to [r]$ istnieją $x, y, z \in [s]$ takie, że $\chi(x) = \chi(y) = \chi(z)$ i $x + y = z$.*

Dowód: Niech $s + 1 \to (3)_r$ (takie s istnieje na podstawie Tw. Ramsey'a). Dowolne kolorowanie $\chi : [s] \to [r]$ generuje kolorowanie χ' par zbioru $\{0, 1, \ldots, s\}$ w ten sposób, że

$$\chi'(i, j) = \chi(|i - j|).$$

na podstawie Tw. Ramseya istnieją $a, b, c \in \{0, 1, \ldots, s\}$ takie, że $\chi'(ab) = \chi'(ac) = \chi'(bc)$, a więc $\chi(|a - b|) = \chi(|a - c|) = \chi(|b - c|)$. Niech $a < b < c$. Wtedy $x = b - a$, $y = c - b$ i $z = c - a$ spełniają tezę twierdzenia. ■

Zadanie Domowe 6 Niech $s(r)$ będzie najmniejszą liczbą naturalna spełniającą tezę twierdzenia 7. Pokazać, że

$$\frac{1}{2}(3^r + 1) < s(r) \leq r!e.$$

Motywacją dla tw. 7 było Wielkie tw. Fermata. Schur pokazał, że nie jest ono prawdziwe jesli równanie $x^r + y^r = z^r$ zastapic kongruencją modulo liczba pierwsza.

Twierdzenie 8 (Schur, 1916) *Dla wszystkich r i dla wszystkich dostateczni dużych liczb pierwszych p istnieją liczby naturalne x, y, z takie, że*

$$x^r + y^r \equiv z^r (\mod p).$$

Dowód: Niech s spelnia tw. 7, $p > s$ bedzie liczba pierwszą i niech $Z_p^* = [p1]$ będzie grupą mnożenia reszt modulo p. Podzbiór $H = \{x^r (\mod p) : x \in Z_p^*\}$ jest podgrupą rzędu $(p-1)/\gcd(r, p-1)$. Warstwy Z_p^* względem H dzielą Z_p^* na $k = \gcd(r, p-1)$ rozłącznych zbiorów, postaci $a_i H$, gdzie $a_i \in Z_p^*$, $i = 1, \ldots, k$.

Na podstawie tw. 7 istnieją $i \in [k]$ oraz $a, b, c \in a_i H$ takie, że $a + b = c$. To oznacza, że istnieją $x, y, z \in Z_p^*$ takie, że $a_i x^r + a_i y^r \equiv a_i z^r (\mod p)$. Mnożąc stronami przez a_i^{-1}, kończymy dowód. ■

3.2 Twierdzenie Van der Waerdena

Schur pokazał, że w dowolnym skonczonym kolorowaniu liczb naturalnych istnieje monochromatyczne rozwiązanie równania $x + y = z$. A inne równania?

Zadanie Domowe 7 Pokazać kolorowanie liczb naturalnych czterema kolorami, w którym nie ma monochromatycznego rozwiązania równania $x + y = 3z$. Wskazówka: wyciągnąc piątki.

Schur postawił hipotezę, że dla $x + y = 2z$ jest to jednak prawda.

Twierdzenie 9 (Van der Waerden, 1927) *Dla wszystkich r i k istnieje n takie, że dla każdego $\chi : [n] \to [r]$ istnieje monochromatyczny ciag arytmetyczny długości k (w skrócie AP_k).*

Dowód dla $r = 2$ i $k = 3$: Niech $n = 325 = 5(2 \times 2^5 + 1)$ i niech $\chi : [325] \to [2]$. Podzielmy $[165]$ na bloki kolejnych liczb naturalnych, długości 5, $B_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \ldots, B_{33} = \{161, 162, 163, 164, 165\}$. Ponieważ istnieją tylko $32 = 2^5$ kolorowania jednego bloku, to istnieją dwa bloki pokolorowane tak samo, B_i i B_j, $1 \leq i < j \leq 33$. Spójrzmy na $B_i = \{5i-4, ..., 5i\}$. Wśród liczb $5i-4, 5i-3, 5i-2$ są dwie tego samego koloru, powiedzmy $\chi(5i-4) = \chi(5i-2) = 1$. Wtedy $\chi(5i) = 2$, bo inaczej koniec dowodu. Ponadto, $\chi(5j-2) = 1$ i $\chi(5j) = 2$. mamy więc dwie pary monochromatyczne: $\chi(5i-4) = \chi(5j-2) = 1$ i $\chi(5i) = \chi(5j) = 2$, zogniskowane na tej samej liczbie $10j - 5i \geq 330 - 5 = 325$. Zatem, niezależnie od koloru $\chi(10j - 5i$, istnieje monochromatyczny AP_3. ■

Zadanie Domowe 8 Każde 2-kolorowanie zbioru [256] zawiera monochromatyczny ciąg geometryczny długości trzy.

Dowód tw. 9 dla $r = 3$ i $k = 3$: Niech

$$n = 7(2 \times 3^7 + 1) \left(2 \times 3^{7(2\times 3^7+1)} + 1\right)$$

i niech $\chi : [n] \to [3]$. Podzielmy $\left[\frac{1}{2}\left(n - 7(2 \times 3^7 + 1)\right)\right]$ na bloki B_i, $i = 1, \ldots, 3^{7(2\times 3^7+1)} + 1$, długości $|B_i| = 7(2 \times 3^7 + 1)$, a każdy z nich na podbloki $B_{i,j}$ długości siedem. Z zasady szufladkowej, istnieją dwa bloki, B_{i_1} i $B_{i_1+d_1}$ pokolorowane identycznie, a w ramach B_{i_1} istnieją dwa podbloki B_{i_1,i_2} i B_{i_1,i_2+d_2} pokolorowane identycznie, gdzie $1 \leq i_2 < i_2 + d_2 \leq 3^7 + 1$.

Wśród pierwszych czterech liczb zbioru B_{i_1,i_2} istnieją dwie tego samego koloru, np. $\chi(i_3) = \chi(i_3 + d_3) = 1$. Wtedy $i_3 + 2d_3 \in B_{i_1,i_2}$ i $\chi(i_3 + 2d_3) \neq 1$. Niech, np., $\chi(i_3 + 2d_3) = 2$. Korzystając z podbloku B_{i_1,i_2+d_2} mamy $\chi(i_3) = \chi(i_3 + d_3 + 7d_2) = 1$ oraz $\chi(i_3 + 2d_3) = \chi(i_3 + 2d_3 + 7d_2) = 2$. Obie te pary są zogniskowane na liczbie $i_3 + 2d_3 + 14d_2$, więc $\chi(i_3 + 2d_3 + 14d_2) = 3$.

Zamieniając drugie elementy powyższych par na ich kopie w podbloku $B_{i_1+d_1,i_2+d_2}$, odpowiednio, $i_3 + d_3 + 7d_2 + 7(2 \times 3^7 + 1)d_1$ koloru 1 i $i_3 + 2d_3 + 7d_2 + 7(2 \times 3^7 + 1)d_1$ koloru 2, oraz dodając do $i_3 + 2d_3 + 14d_2$ jego kopię $i_3 + 2d_3 + 14d_2 + 7(2 \times 3^7 + 1)d_1$, również koloru 3, otrzymujemy trzy pary monochromatyczne, każda w innym kolorze, zogniskowane na liczbie $i_3 + 2d_3 + 14d_2 + 14(2 \times 3^7 + 1)d_1$, która musi zamknąć monochromatyczny AP_3. ■

Zadanie Domowe 9 Oszacować z dołu najmniejsze n spełniające tezę tw. 9 dla $r = k = 3$.

Zadanie Domowe 10 Zbiór $[\frac{1}{2}(3^n + 1)]$ zawiera podzbiór mocy 2^n wolny od AP_3.

Brnijmy dalej.

Dowód tw. 9 dla $r = 2$ i $k = 4$ przy założeniu, że zachodzi dla $k = 3$ i wszystkich r: Niech $W(k, r)$ oznacza najmniejsza liczbę n spełniajaca teze dla k i r. Weźmy $2W(3, 2^{2W(3,2)})$ bloków B_i rozmiaru $c = 2W(3, 2)$. Pomalujmy wszystkie liczby 2 kolorami. Wśród pierwszych $W(3, 2)$ bloków będą 3 pomalowane tak samo, których numery tworzą AP_3. Niech $i < j < l$ beda ich numerami. W lewej połowie B_i (rzędu $W(3, r)$) istnieje monochromatyczny

AP_3, powiedzmy koloru 1 o różnicy d. Oznaczmy go przez $a, a+d, a+2d$. Wtedy $\chi(a+3d) = 2$. Rozważmy dwa AP_3: $a, a+d+c(j-i), a+2d+2c(l-i)$ koloru 1, i $a+3d, a+3d+c(j-i), a+3d+c(l-i)$ koloru 2. Są one zogniskowane na tej samej liczbie, stąd musi istniec monochromatyczny AP_4. ■

Spójrzmy jeszcze na przypadek z większą liczbą kolorów.

Dowód tw. 9 dla $k=3, r=4$: Wystapia tu bloki trzech $(r-1)$ poziomów. Pierwszy, najbardziej wewnętrzny poziom, to bloki dlugości $c_1 = 9$, bo $5 \to (2)^1_4$, a $9 = 5+4$, czyli każda para z lewej piątki ma rozszerzenie do AP_3 w ramach bloku. Bloki 2 poziomu składają się z $c_2 = 2 \times 4^{c_1}$ bloków 1 poziomu, aby w ich lewych połowach (plus jeden) znależć parę bloków 1 poziomu pomalowanych tak samo. Bloki 3 poziomu składaja się z $c_3 = 2 \times 4^{c_1 c_2}$ bloków 2 poziomu, tak by znów znależc dwa pomalowane tak samo. W końcu, przyjmujemy $c_4 = 2 \times 4^{c_1 c_2 c_3}$ i $n = c_1 c_2 c_3 c_4$. Dzięki takiej konstrukcji, w dowolnym 4-kolorowaniu znajdziemy 4 pary liczb, każda w innym kolorze, zogniskowane na tym samym elemencie, co kończy dowód. ■

Podsumujmy szkicem dowodu w ogólnym przypadku. Zakładamy, że tw. 9 jest prawdziwe dla wszytkich par $(k-1, r')$, $r' \geq 1$. Niech $w_k(r)$ będzie oszacowaniem górnym na liczbę n, dla której zachodzi to twierdzenie, wynikającym z tego dowodu. Przyjmujemy

$$c_1 = 2w_{k-1}(r), \quad c_2 = 2w_{k-1}\left(r^{c_1}\right) \quad ,..., \quad c_r = 2w_{k-1}\left(r^{c_1 c_2 \cdots c_{r-1}}\right),$$

and $w_k(r) = c_1 c_2 \cdots c_r \geq c_r$. Tak otrzymane oszacowanie $w_k(r)$ jest jednak astronomiczne. Żeby to sobie uświadomić, wprowadźmy hierarchię Ackermanna.

Hierarchia Ackermanna.

Wprowadzimy ciąg funkcji f_i liczb naturalnych coraz szybciej zbieżnych do zera. Niech $f_1(x) = 2x$ i $f_{i+1}(x) = f_i^{(x)}(1)$, $i \geq 1$, $x \geq 1$, gdzie $f^{(k)}$ jest k-krotnym z złożeniem funkcji f w $x = 1$. Alternatywnie, można zdefiniowac $f_{i+1}(1) = 2$ i $f_{i+1}(x+1) = f_i(f_{i+1}(x))$. Zauważmy, że $f_i(1) = 2$ a $f_i(2) = 4$ dla wszystkich $i \geq 1$, oraz że wszystkie funkcje są rosnące.

Funkcją Ackermanna nazywamy funkcję $f_\infty(x) = f_x(x)$. Rośnie ona szybciej niż wszystkie funkcje f_i.

Twierdzenie 10 $w_k(2) \geq f_\infty(k-2)$.

Lemat 1 *Dla wszystkich $k \geq 3, r \geq 2$ mamy $w_k r \geq f_k(r+1)$.*

Dowód: Indukcja wzgledem k. Najpierw $k = 3$. Ponieważ $w_3(r) \geq c_r$, to wystarczy pokazać (indukcją po $i = 1, \dots r$), że $c_i \geq f_3(i+1)$. Mamy $c_1 = 2w_2(r) = 2(r+1) \geq 4 = f_3(2)$ oraz

$$c_{i+1} \geq 2^{c_i} = f_2(c_i) \geq f_2(f_3(i+1)) = f_3(i+2),$$

co konczy dowód przypadku $k = 3$.

Dla dowolnego $k+1$ schemat dowodu jest podobny. Z zalożenia indukcyjnego dla k, mamy $c_1 \geq w_k(r') \geq f_k(r'+1)$ dla wszystkich r'. Teraz pokazujemy indukcją po i, że $c_i \geq f_k^{(i)}(r+1)$. Mamy

$$c_{i+1} \geq w_k(r^{c_i}) \geq w(c_i) \geq f_k(c_i + 1) \geq f_k(c_i) \geq f_k^{(i+1)}(r+1).$$

Zatem

$$w_{k+1}(r) \geq c_r \geq f_k^{(r)}(r+1) \geq f_k^{(r)}(2) = f_k^{(r+1)}(1) = f_{k+1}(r+1). \quad \blacksquare$$

Dowód tw. 10:

$$w_k(2) \geq f_k(3) = f_{k-1}^{(3)}(1) = f_{k-1}(4) = f_{k-2}^{(4)}(1) = f_{k-2}(f_{k-2}(4)) \geq f_{k-2}(k-2) = f_\infty(k-2).$$

$\blacksquare$

4 Uogólnienia twierdzeń Schura, Van der Waerdena i Ramsey'a

Zacznijmy od wzmocnienia tw. 7 domagając się, by $x \neq y$.

Twierdzenie 11 *Dla wszystkich r istnieje $\hat{s}$ takie, że dla każdego $\chi : [\hat{s}] \to [r]$ istnieją $x, y, z \in [s]$ takie, że $x \neq y$, $\chi(x) = \chi(y) = \chi(z)$ i $x + y = z$.*

Dowód: Indukcja względem r. mamy $\hat{s}(1) = 3$. Załóżmy, że $\hat{s}(r-1)$ istnieje i niech $n = 2\hat{s}(r-1)$. Pokażemy, że $\hat{s}(r) \leq w(n+1; r)$, gdzie ta ostatnia liczba spełnia tw. 9. Rozważmy dowolne kolorowanie $\chi : [w(n+1; r)] \to [r]$. Istnieje w nim monochromatyczny $AP_{n+1} = (a, a+d, \dots, a+dn)$. Rozpatrzmy dwa przypadki.

Jeśli istnieje $1 \leq i \leq \hat{s}(r-1)$ takie, że $\chi(id) = \chi(AP_{n-1})$, to $x = id$, $y = a + id$ i $z = a + 2id$ spełniaja tezę twierdzenia. W przeciwnym razie, zbiór $d[\hat{s}(r-1)]$ jest $(r-1)$-kolorowalny i z założenia indukcyjnego również istnieją poszukiwane liczby. $\blacksquare$

Zadanie Domowe 11 $\hat{s}(r) \leq 2^{3r!-1}$ (wskaz.: $3r! \to (3)_r$)

Kolejny rezultat jest wspólnym uogólnieniem twierdzeń 11 i 9.

Twierdzenie 12 *Dla wszystkich $k, r, s \geq 1$ istnieje n takie, że dla każdego $\chi : [n] \to [r]$ istnieją $a, d > 0$ takie, że $\chi(a) = \chi(a+d) \cdots \chi(a+kd) = \chi(sd)$.*

Wniosek 1 *Dla wszystkich $k, r, s \geq 1$ istnieje n takie, że dla każdego $\chi : [n] \to [r]$ istnieją $a, d > 0$ takie, że $\chi(a) = \chi(a \pm d) \cdots \chi(a \pm kd) = \chi(sd)$.*

Zadanie Domowe 12 Udowodnić tw. 12 oraz wniosek 1.

4.1 Twierdzenie Rado

Niech $L(t)$ oznacza równanie $x_1 + \cdots + x_{t-1} = x_t$, $t \geq 3$.

Twierdzenie 13 *Dla wszystkich $r \geq 1$ oraz $k_1, \ldots, k_r \geq 3$ istnieje n takie, że dla każdego $\chi : [n] \to [r]$ istnieje i takie, że $L(k_i)$ ma rozwiązanie w kolorze i.*

Zadanie Domowe 13 Udowodnić tw. 13.

Mówimy, że układ równań S jest r-*regularny*, gdy każde r-kolorowanie liczb naturalnych indukuje monochromatyczne rozwiazanie S, a *regularny*, gdy jest r-regularny dla każdego $r \geq 1$.

Twierdzenie 14 (Rado, 1943) *Dla wszystkich $k \geq 2$ oraz $c_1, \ldots, c_k \neq 0$ i calkowitych równanie $\sum_{i=1}^{k} c_i x_i = 0$ jest regularne wgdy istnieje $I \subseteq [k]$ takie, że $\sum_{i \in I} c_i = 0$.*

Dowód $\Rightarrow$*:*

Niech p będzie liczbą pierwszą, $p > |c_1| + \cdots + |c_k|$. Każdą liczbę naturalną j można jednoznacznie przedstawić w postaci $j = p^{\alpha_j}(\beta_j p + \gamma_j)$, gdzie $\alpha_j, \beta_j \geq 0$, a $1 \leq \gamma_j \leq p-1$. Niech $\chi(j) = \gamma_j$ będzie $(p-1)$-kolorowaniem liczb naturalnych. Z założenia o regularności istnieje wtedy monochromatyczne rozwiązanie, na przykład w kolorze γ, to znaczy istnieją $\alpha^{(i)}, \beta^{(i)}$, $i = 1, \ldots, k$ takie, że

$$\sum_{i=1}^{k} p^{\alpha_j}(\beta_j p + \gamma) = 0.$$

Niech $\alpha = \min_i \alpha^{(i)}$. Dzieląc stronami powyższe równanie przez p^α, zauważamy, że $\sum_{i\in I} c_i\gamma$ jest podzielna przez p, gdzie $I = \{i : \alpha^{(i)} = \alpha\}$. Ale $\gamma < p$, więc $\sum_{i\in I} c_i = 0(\mod p)$. Ponieważ jednak

$$\left|\sum_{i\in I} c_i\right| \leq |c_1| + \cdots + |c_k| < p,$$

więc $\sum_{i\in I} c_i = 0$. ■

Dowód $\Leftarrow$*:* Przyjmijmy, że $c_1 + \cdots + c_i = k$, $0 < i < k$. (Gdyby $i = k$, to $x_1 = \cdots x_k = 1$ byłoby monochromatycznym rozwiązaniem.) Niech $A = NWD(c_1, \ldots, c_k)$, $B = c_{i+1} + \cdots + c_k$ ($\neq 0$), $s = A/NWD(A,B)$, $t = -B/NWD(A,B)$. Wtedy $At+Bs = 0$. Z elementarnej teorii liczb wiemy, że równanie $c_1x_1+\cdots+c_ix_i = At$ ma całkowite rozwiązanie $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$. Ustalmy jedno takie rozwiązanie. Wtedy, dla dowolnych a, d, $x_1 = a + \lambda_1 d, \ldots, x_i = a + \lambda_i d, x_{i+1} = s, \ldots, x_k = s$ jest rozwiązaniem równania $\sum_{i=1}^k c_ix_i = 0$. Rzeczywiscie,

$$a(c_1 + \cdots + c_i) + d(c_1\lambda_i + \cdots + c_i\lambda_i) + sdB = dAt + dBs = 0.$$

Niech χ będzie dowolnym r-kolorowaniem liczb naturalnych. Na podstawie Wniosku 1 z $k = \max|\lambda_j|$, istnieją a, d takie, że powyższe rozwiązanie jest monochromatyczne. ■

Liczbą Rado $r(S)$ równania S nazywamy najmniejsze n takie, że każde 2-kolorowanie liczb naturalnych indukuje monochromatyczne rozwiązanie S.

Zadanie Domowe 14 (a) $r(x + y = az) = \binom{a+1}{2}$ dla $a \geq 4$

(b) $r(L(t)) = t^2 - t - 1$

Wskazowka do 14(a) – oszacowanie z góry: Dla wygody zakładamy, że a jest parzyste i pomalowane na blue (B). Niech m_0 bedzie największą liczbą nat. taką, że $\chi(a) = \chi(2a) = \cdots = \chi(m_0a) = B$. Pokazać najpierw, że gdyby nie było monochr. rozw., to $\chi((m_0 + 1)a) = \cdots = \chi(a^2/2) = R$, $\chi(2) = \cdots = \chi(2m_0) = R$ i $\chi(2m_0 + 2) = \cdots = \chi(a - 1) = B$. Potem rozważyć dwa przyp. w zależności od koloru jedynki.

4.2 Twierdzenie Halesa-Jewitta

Niech $\mathcal{A}$ bedzie liniowo uporzadkowanym alfabetem, $|\mathcal{A}| = t$. *Kostką wymiaru n nad $\mathcal{A}$* nazywamy zbiór wektorów $C_t^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in calA\}$.

Własności kombinatoryczne kostki nie zależą od alfabetu $\mathcal{A}$, a tylko od jego mocy t. Najczęściej przyjmuje się, że $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, t-1\}$. Podzbiór $L \subset C_t^n$ nazywamy *linią*, gdy $L = \{l_0, \ldots, l_{t-1}\}$, $l_k = (x_{k,0}, \ldots, x_{k,t-1})$ oraz gdy istnieje podział $[n] = R \cup S$, $R \neq \emptyset$ i stałe $c_l \in \{0, 1, \ldots, t-1\}$, $l \in R$, takie, że dla każdego $k = 0, 1, \ldots, t-1$

$$x_{k,l} = \begin{cases} c_l & \text{gdy} \quad l \in S \\ k & \text{gdy} \quad l \in R \end{cases}.$$

Twierdzenie 15 (Hales-Jewitt, 1963) *Dla wszystkich $r, t \geq 1$ istnieje n takie, że dla każdego $\chi : C_t^n \to [r]$ istnieje monochromatyczna linia.*

Odwzorowanie $a = (a_1, \ldots, a_n) \to \sum_{i=1}^n a_i t^{i-1}$ jest bijekcją między C_t^n a zbiorem liczb $\{0, 1, \ldots, t^n - 1\}$, w której obrazem linii $(l_0, \ldots, l_{t-1})$ są liczby

$$y_k = \sum_{l \in S} c_l t^{l-1} + \sum_{l \in R} k t^{l-1} = a + kd,$$

gdzie $a = \sum_{l \in S} c_l t^{l-1}$, a $d = \sum_{l \in R} t^{l-1}$, stanowiące, jak widać, ciąg arytmetyczny. Zatem tw. 15 uogólnia tw. 9 (jeśli n spełnia tw. 15, to t^n spełnia tw. 9.

Zadanie Domowe 15 Pokazać, że jeśli n spełnia tw. 15, to $(t-1)n+1$ spełnia tw. 9.

Tw. 15 implikuje też uogólnienie wielowymiarowej wersji tw. 9. Niech $V \subset \mathbb{N}^m$ będzie skończonym zbiorem. *Homotetyczna kopia V* nazywamy każdy zbiór W postaci $W = cV + b$, gdzie $c \in \mathbb{N}$ a $b \in \mathbb{N}^m$ (jest to podobieństwo bez obrotów).

Twierdzenie 16 (Gallai, 1933) *Dla wszystkich $r \geq 1$ i $V \subset \mathbb{N}^m$, $|V| < \infty$, istnieje n takie, że dla każdego $\chi : \mathbb{N}^m \to [r]$ istnieje monochromatyczna, homotetyczna kopia V.*

Dowód: Niech $V = \{v_1, \ldots, v_t\}$ i niech n będzie takie, jak w tw. 15. Rozważmy n-kostkę C_t^n nad alfabetem V. Dla każdego wektora $a \in C_t^n$ jego współrzędne a_i są wektorami z V. Znajdźmy liczby $k_1, \ldots, k_n$ takie, że dla wszystkich par $a \neq a' \in C_t^n$, $\sum_{i=1}^n k_i(a_i - a_i') \neq 0$ Wtedy odwzorowanie $\Psi : C_t^n \to \mathbb{N}^m$ dane wzorem

$$\Psi(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i$$

jest iniekcją, przy której linia przechodzi w homotetyczną kopię V. $\blacksquare$

Dla $m = 2$ i $V = \{0 \leq i, j \leq k-1\}$ każda homotetyczna kopia $cV + b$ jest dwuwymiarowym ciągiem arytmetycznym $(b_1 + ic, b_2 + jc)$, $0 \leq i, j \leq k-1$. W szczególności, dla $k = 2$ mamy kwadrat.

4.2.1 Dowód Shelaha tw. 15

Tutaj przyjmujemy alfabet $[t]$, a wektory należące do C_t^n bedziemy nazywać *punktami.* Podzbiór $L \subset C_t^n$ nazywamy *linią Shelaha*, gdy $L = \{l_1, \dots, l_t\}$, $l_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,t})$ oraz gdy istnieją $0 \leq i < j \leq n$ takie, że dla każdego $k = 1, \dots, t$

$$x_{k,l} = \begin{cases} t-1 & \text{gdy} \quad l \leq i \\ k & \text{gdy} \quad i < l \leq j \\ t & \text{gdy} \quad l > j \end{cases} .$$

Jest to więc szczególny przypadek linii, gdzie $S = [i] \cup ([n] \setminus [j])$, a $c_l = t-1$, gdy $l \in [i]$ i $c_l = t$, gdy $l \in [n] \setminus [j]$. Liczbę k nazwijmy *pozycją* punktu l_k w linii L. Jest dokładnie $\binom{n+1}{2}$ linii Shelaha.

Niech $n = n_1 + \cdots n_s$ i niech L_j bedzie linią Shelaha w $C_t^{n_j}$. Wtedy $L_1 \times \cdots \times L_s$ nazywamy *s-przestrzenia Shelaha.* Istnieje naturalna (kanoniczna) bijekcja z $\phi : L_1 \times \cdots \times L_s \to C_t^s$ przypisująca każdemu elementowi s-przestrzeni wektor złożony z pozycji poszczególnych punktów linii $L_1, \dots, L_t$.

Kolorowanie $\chi : C_t^s \to [r]$ nazywamy *fliptop*, gdy $\chi(P) = \chi(Q)$ dla wszystkcih par punktów $P, Q \in C_t^s$, które mają wszystie współrzędne równe z wyjątkiem jednej, gdzie ich wartości wynoszą $t-1$ i t. Na przykład, dla $t = 5$, $\chi(12451) = \chi(12551)$. Przy danym $\chi : L_1 \times \cdots \times L_s$, s-przestrzeń $L_1 \times \cdots \times L_s$ nazywamy *fliptop*, gdy kolorowanie indukowane na C_t^s wzorem $\chi'(P) = \chi(\phi^{-1}(P))$, $P \in C_t^s$ jest fliptop. Równoważnie, oznacza to że dla każdego $i \in [s]$ i dla wszystkich $z_j \in L_j$, $j \in [s] \setminus \{i\}$,

$$\chi(z_1 \cdots z_{i-1} z_i^{ost} z_{i+1} \cdots z_s) = \chi(z_1 \cdots z_{i-1} z_i^{post} z_{i+1} \cdots z_s),$$

gdzie z_i^{ost} i z_i^{post} są ostatnim i przedostatnim punktem linii L_i. W szczególności dla $s = 1$, linia Shelaha jest fliptop, gdy jej ostatnie dwa punkty są tego samego koloru.

Twierdzenie 17 (Pomocnicze) *Dla wszystkich $t, r, s \geq 1$, istnieje n takie, że dla każdego $\chi : C_t^n \to [r]$ istnieje fliptop s-przestrzeń Shelaha.*

Poniższy lemat będzie potrzebny tylko w dowodzie tw. 17.

Lemat 2 *Dla wszystkich $t, r \geq 1$, jeśli $n \geq r$, to dla każdego $\chi : C_t^n \to [r]$ istnieje fliptop linia Shelaha.*

Dowód: Prosty dowód w oparciu o zasadę szufladkową pomijamy. ■

Poza tw. 17 kluczowym elementem dowodu Shelaha jest lemat 3.

Lemat 3 *Załóżmy, że dla każdego $\chi : C_{t-1}^s \to [r]$ istnieje monochromatyczna linia. Wtedy dla każdego fliptop $\chi : C_t^s \to [r]$ istnieje monochromatyczna linia.*

Dowód: Niech $\chi : C_t^s \to [r]$ będzie fliptop. Ograniczamy je do podkostki C_{t-1}^s i stosujemy założenie indukcyjne. na jego podstawie istnieje monochromatyczna linia $\{l_1, \ldots, l_{k-1}$. Dodajmy do niej punkt l_k otrzymany z l_{k-1} przez zamianę wszystkich współrzędnych o indeksach z R (a więc równych $t-1$), na t. Dzieki własności fliptop, $\chi(l_k) = \chi(l_{k-1}$. ■

Dowód tw. 15: Przy ustalonym r stosujemy indkucje wzgledem t. Dla $t = 1$ wystarczy $n = 1$. Załóżmy, że $t \geq 2$ i że tw. 15 zachodzi dla kostki C_{t-1}^s. Niech n będzie takie jak w tw. 17. Wtedy dla każdego $\chi : C_t^n \to [r]$ istnieje fliptop s-przestrzeń Shelaha $L_1 \times \cdots \times L_s$. W odwzorowaniu kanonicznym ϕ, $L_1 \times \cdots \times L_s$ przechodzi na C_t^s, ktora jest fliptop, wiec z lematu 3 istnieje monochromatyczna linia $L \subset C_s^t$ wzgledem koloroania χ', indukowanego przez χ. Jej przeciwobraz $\phi^{-1}(L)$ jest monochromatyczną linią w C_t^n. ■

Dowód tw. 17: Punkt $l \in C_t^n$ nazywamy punktem Shelaha, gdy istnieje linia Shelaha $L \ni l$. Jest co najwyżej $\binom{n+1}{2}t$ punktów Shelaha. Niech $n_1 = r^{t^{s-1}}$, $n_2 = r^{\binom{n_1+1}{2}t^{s-1}}$,..., $n_{i+1} = r^{A_i}$, gdzie dla $1 \leq i < s$

$$A_i = \left[\prod_{j \leq i} \binom{n_j + 1}{2}\right] t^{s-1}.$$

Udowodnimy tw. 17 z $n = n_1 + \cdots + n_s$.

Punkty $y \in C_t^n$ będziemy przedstawiać w postaci $y = y_1 \cdots y_s$, gdzie $y_j \in C_t^{n_j}$, $j = 1, \ldots, s$. Niech $\chi : C_t^n \to [r]$. Szukaną fliptop s-przestrzeń Shelaha $L_1 \times \cdots \times L_s$ skonstruujemy od rekurencyjnie od końca. Wprowadźmy relację równoważności na $C_t^{n_s}$ warunkiem:

$$y_s \equiv y_s' \quad \Longleftrightarrow \quad \chi(y_1 \cdots y_s) = \chi(y_1 \cdots y_s')$$

dla wszystkich punktów Shelaha $y_j \in C_t^{n_j}$, $j = 1, \ldots, s-1$. Liczba wyborów tych punktów (a więc i liczba równości definiujących relację $\equiv$) nie przekracza A_{s-1}. Zatem liczba klas równważności nie przekracza $r^{A_{s-1}} = n_s$. Podział kostki $C_t^{n_s}$ na te klasy traktujemy jak nowe kolorowanie $\hat{\chi}$ Z lematu 2 istnieje linia Shelaha $L_s \in C_t^{n_s}$, która jest fliptop względem $\hat{\chi}$.

Przypuśćmy, że już znaleźliśmy fliptop linie Shelaha $L_s, L_{s-1}, \ldots, L_{i+1}$. W celu znalezienia L_i, dla $y_i, y_i' \in C_t^{n_i}$ definiujemy relację

$$y_i \equiv y_i' \quad \Longleftrightarrow \quad \chi(y_1 \cdots y_{i-1} y_i z_{i+1} \cdots z_s) = \chi(y_1 \cdots y_{i-1} y_i z_{i+1} \cdots z_s)$$

dla wszystkich punktów Shelaha $y_j \in C_t^{n_j}$, $j = 1, \ldots, i-1$, i wszystkich $z_j \in L_j$, $j = i+1, \ldots, s$. Tak jak poprzednio, liczba klas równważności 9kolorów kolorowania $\hat{\chi}$) nie przekracza $r^{A_{i-1}} = n_i$, więc na podstawie lematu 2 istnieje fliptop (względem $\bar{\chi}$) linia Shelaha $L_i \subset C_t^{n_i}$.

Pokażemy teraz, że tak skonstruowana s-przestrzeń Shelaha $L_1 \times \cdots \times L_s$ jest fliptop. Ustalmy $i \in [s]$ i niech z_i^{ost}, z_i^{post} będą dwoma ostatnimi punktami linii L_i. Poniewaz L_i jest fliptop, to $\bar{\chi}(z_i^{ost}) = \bar{\chi}(z_i^{post})$, równoważnie, $z_i^{ost} \equiv z_i^{post}$, a zatem

$$\chi(z_1 \cdots z_{i-1} z_i^{ost} z_{i+1} \cdots z_s) = \chi(z_1 \cdots z_{i-1} z_i^{post} z_{i+1} \cdots z_s),$$

co oznacza, że $L_1 \times \cdots \times L_s$ jest fliptop. ■

Niech $S(t)$ będzie oszacowaniem górnym na najmniejsze n spełniające tezę tw. 15 z $r = 2$, wynikające z dowodu Shelaha (a zatem n okreslone w tw. dowodzie tw. 17). Mamy $S(1) = 1$ oraz $S(t) = n_1 + \cdots + n_s$, gdzie $s = S(t-1)$. Na przykład, $S(2) = 2$, $S(3) = 8 + 2^{108}$, itd.

Twierdzenie 18 *Dla każdego* $t \geq 3$,

$$f_4(t) \leq S(t) \leq \frac{1}{4} f_4(t+1).$$

Dowód oszacowania z góry: Indukcja względem t; $t = 3$ – ok. Załóżmy, że $S(t-1) \leq \frac{1}{4} f_4(t)$. Ponieważ

$$A_i \leq t^s \prod_{j \leq i} n_i^2 \leq n_i^{2s} n_i^s < n_i^{3n_i} < 2^{2^{n_i}}$$

oraz $n_{i+1} = 2^{A_i}$, to $n_{i+1} \leq 2^{2^{2^{n_i}}}$. Ponadto, $n_1 = 2^{t^{s-1}} < s^{s^s} < f_3(s)$. Zatem, $n_2 \leq f_3(s+3)$ i, iterujac $s-1$ razy,

$$n_s \leq f_3(s + 3(s-1)) = f_3(4s-2).$$

Stąd, $S(t) < sn_s < 2^{n_s} \leq f_3(4s-1)$. Z założenia indukcyjnego $4s = 4S(t-1) \leq f_4(t)$. Ostatecznie,

$$S(t) \leq f_3(f_4(t)-1) = \log_2(f_3(f_4(t))) = \log_2(f_4(t+1)) < \frac{1}{4} f_4(t+1).$$

■

Zadanie Domowe 16 Udowodnić dolne oszacowanie $S(t)$ z tw. 18.

4.3 Twierdzenie Ramsey'a dla k-tek

Twierdzenie 19 (Ramsey, 1930) *Dla wszystkich $r, k, l_1, \ldots, l_r \geq 1$ istnieje n takie, że $n \to (l_1, \ldots, l_r)^k$.*

Dowód 1: Idea: podwójna indukcja po k i $l_1 + \cdots + l_r$ ... ■.

Zadanie Domowe 17 Podać pełen dowód 1 tw. 19.

Dowód 2: Udowodnimy, że dla wszystkich r, k, l istnieje $n \to (l)_r^k$. Ind. po k; dla $k = 1$ jest to zasada szufladkowa. Niech $k \geq 2$, $t \to (l)_r^{k-1}$, $c = \sum_{i=k-2}^{t-1} \binom{i+1}{k-1}$ i $n = r^c + k - 2$. Niech $\chi : \binom{[n]}{k} \to [r]$. Tworzymy ciąg $a_1, \ldots, a_{k-2}, S_{k-2}, a_{k-1}, \ldots, a_{t-1}, S_{t-1}, a_t$ następująco: $a_1, \ldots, a_{k-2} \in [n]$ – dowolne, $S_{k-2} = [n] \setminus \{a_1, \ldots, a_{k-2}\}$, $a_{k-1} \in S_{k-2}$. Zbiór $S_{k-2} \setminus \{a_{k-1}\}$ dzielimy na klasy abstrakcji (kolory) według koloru $\chi(a_1, \ldots, a_{k-2}, a_{k-1}, x)$. Niech S_{k-1} będzie największą klasą. Mamy

$$|S_{k-1}| \geq \frac{|S_{k-2}| - 1}{r} \quad \Rightarrow \quad |S_{k-1}| \geq \frac{|S_{k-2}|}{r} = r^{\sum_{i=k-1}^{t-1} \binom{i+1}{k-1}}.$$

..... ■

Twierdzenia 19 nie da się rozszerzyć na kolorowania $2^{[n]}$ (dlaczego?) Ramsey pokazał jednak, że

Wniosek 2 *Dla wszystkich $r, l \geq 1$ istnieje n takie, że dla każdego kolorowania $\chi : 2^{[n]} \to [r]$ istnieje $T \subset [n]$, $|T| = l$ taki, że χ jest stałe na $\binom{T}{i}$ dla kazdego $i = 1, \ldots, l$.*

Zadanie Domowe 18 Wywnioskować wniosek 2 z tw. 19.

4.4 Problem o szczęśliwym zakończeniu

Poniżej zakładamy, że żadne 3 punkty nie są współliniowe. Esther Klein (Budapeszt, 1932) zauważyła, że wśród dowolnych 5 punktów na płaszczyżnie pewne 4 tworzą czworokąt wypukły. Erdős i Szekeres uogólnili to.

Twierdzenie 20 (Erdős-Szekeres, 1935) *Dla każdego n istnieje N takie, że dla dowolnych N punktów na płaszczyźnie pewne n spośród nich tworzy wielokąt wypukły.*

Dowód: Niech $N \to (n, 5)^4$ ... ■.

W powyzszym dowodzie potrzebny jest lemat.

Lemat 4 *Jeśli każde 4 z n punktów tworzą czworokąt wypukły, to wszystkie n punktów tworzy wielokąt wypukły.*

Zadanie Domowe 19 Udowodnić lemat 4.

Tarsy zaproponował inny dowód tw. 20, oparty na relacji $N \to (n)^3$.

Zadanie Domowe 20 Podać dowód Tarsy'ego.

Niech $N(n)$ będzie najmniejsza liczbą spełniającą tezę tw. 20. Wiadomo, że

$$2^{n-2} + 1 \leq N(n) \leq \frac{1}{2}\binom{2n-5}{n-2} + 2.$$

Hipoteza Erdősa i Szekeresa głosząca, że $N(n) = 2^{n-2} + 1$ pozostaje szeroko otwarta.

Zadanie Domowe 21 Udowodnić, że $N(5) \geq 9$.

4.5 Wersje nieskończone

Twierdzenie 21 (Ramsey, 1930) *Dla wszystkich* $r, k \geq 1$ *i dla każdego* $\chi : \binom{\mathbb{N}}{k} \to [r]$ *istnieje* $T \subset \mathbb{N}$, $|T| = \infty$, *taki, że* $|\chi(\binom{T}{k})| = 1$.

Zadanie Domowe 22 Udowodnić, tw. 21.

4.5.1 Zasada zwartości

W języku hipergrafów, własność $n \to (l)_r^k$ tłumaczy sie na $\chi(H_n^{k,l}) > r$, a więc tw. Ramseya jest równoważne rozbieżności $\chi(H_n^{k,l}) \to \infty$, gdzie $H_n^{k,l}$ jest hipergrafem o zbiorze wierzchołków $\binom{[n]}{k}$ i krawędzi $\{\binom{S}{k} : S \in \binom{[n]}{l}\}$.

Twierdzenie 22 (Zasada zwartości, Rado, 1949) *Niech* H *będzie hipergrafem, którego zbiór wierzchołków* V *jest przeliczalny, a wszystkie krawędzie skończone. Jesli* $\chi(H) > r$, *to istnieje* $W \subset V$, $|W| < \infty$, *taki, że* $\chi(H[W]) > r$.

Dowód: ... ■

Zbiór nazywamy *duzym*, gdy $|S| > \min(S)$.

Twierdzenie 23 (Paris - Harrington, 1977) *Dla wszystkich* $n, r, k \geq 1$ *istnieje* m *takie, że dla każdego* $\chi : \binom{\{n,\dots,m\}}{k} \to [r]$ *istnieje duży zbiór* S *taki, że* $|\chi(\binom{S}{k})| = 1$.

Zadanie Domowe 23 Udowodnić, tw. 23.

4.5.2 Nieskończenie wiele kolorów

Zadanie Domowe 24 Obliczyć szóstą liczbę Bella $B(6)$.

Kolorowanie zbioru jest *kanoniczne*, gdy jest stałe lub różnowartościowe.

Zadanie Domowe 25 (a) Udowodnić, że dla dowolnego kolorowania $\mathbb{N}$ istnieje nieskończony podbiór T, na którym to kolorowanie jest kanoniczne.

(b) Dla każdego k wyznaczyć najmniejsze n takie, że dla każdego kolorowania $[n]$ istnieje k-elementowy podzbiór pomalowany kanonicznie.

Kolorowanie zbioru $\binom{V}{2}$, gdzie V jest uporządkowany liniowo, jest *kanoniczne*, gdy jest stałe, różnowartościowe, typu minimum lub typu maksimum (w 2 ostatnich przypadkach chodzi o kolorowania wyznaczone przez mniejszy i, odpowiednio, większy element pary).

Twierdzenie 24 (Erdös - Rado, 1950) *Dla każdego kolorowania* $\binom{\mathbb{N}}{2}$ *istnieje nieskończony podbiór* T*, którego zbiór par jest pomalowany kanonicznie. Dla każdego* k *istnieje* n *takie, że dla każdego kolorowania* $\binom{[n]}{2}$ *istnieje* k*-elementowy podzbiór* $T \subset [n]$*, którego zbiór par jest pomalowany kanonicznie.*

Dowód: ... ■

5 Liczby Ramseya i inne

Liczba Ramseya $R_k(l_1, \ldots, l_r)$ to najmniejsza liczba naturalna n taka, że $n \to (l_1, \ldots, l_r)^k$. Skróty: $R_k(l, \ldots, l) = R_k(l; r)$, $R_2(l; 2) = R(l)$ itp. Na podstawie tw. 2 liczby Ramseya istnieją. Z 1. dowodu tw. 2 dla r kolorów i par $(k = 2)$ wynika nierówność

$$R(l_1, \ldots, l_r) \leq \sum_{i=1}^{r} R(l_1, \ldots, l_{i-1}, \ldots, l_r) - r + 2.$$

Dla $k = r = 2$ można ja poprawic o 1 korzystając z parzystości sumy stopni w grafie.

5.1 Wartości dokładne

Łatwo pokazać, że $R(2, l) = R(l, 2) = l$ i $R(3) = 6$. Nieco trudniej, że $R(3, 4) = 9$, $R(3, 5) = 14$ i $R(4) = 18$.

Zadanie Domowe 26 Pokazać, że $R(3, 4) > 8$.

Dla $r > 2$ jedyna znana liczba Ramseya to $R(3, 3, 3) = R(3; 3) = 17$, a dla $k > 2$, $R_3(4, 4) = 13$.

Zadanie Domowe 27 Spróbować oszacować $R_3(4, 4)$, np. $13 \leq R_3(4, 4) \leq 15$.

5.2 Oszacowanie górne

Z nierówności rekurencyjnej wynika oszacowanie górne $R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$, a z niego asymptotyczne $R(k) = O(4^k/\sqrt{k})$. Niedawno Conlon poprawił to, zastępując mianownik przez k^m dla dowolnie dużego m.

Zadanie Domowe 28 Pokazać, że $R(k, 3) \leq (k^2 + 3)/2$.

5.3 Oszacowania dolne

5.3.1 Metoda probabilistyczna Erdősa

Fakt 1 *Jeśli* $\sum_i P(A_i) < 1$, *to* $\bigcap_i \bar{A}_i \neq \emptyset$

Fakt 2 *Istnieją* $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ *takie, że* $X(\omega_1) \leq EX \leq X(\omega_2)$.

Mówimy, że turniej ma własność S_k, gdy dla dowolnych k graczy istnieje gracz, który bije ich wszystkich ($\forall x_1, \ldots, x_k \exists y : y \to x_i, \quad i = 1, \ldots, k$).

Zadanie Domowe 29 Stosując Fakt 1, pokazać, że dla każdego k istnieje turniej o własności S_k. Skonstruować przykłady dla $k = 1$ i $k = 2$.

Przypomnijmy, że $v(n)$ jest największą liczba naturalną taką, że każdy turniej T_n zawiera tranzytywny podturniej $T_{v(n)}$.

Zadanie Domowe 30 Stosując Fakt 1, pokazać, że $v(n) \leq 1 + 2\log_2 m$.

Zadanie Domowe 31 Stosując Fakt 1, oszacowac jak najlepiej z dołu liczbę Van der Waerdena $W(k)$, będącą największą liczbą naturalną n taką, że każde 2-kolorowanie liczb od 1 do n zawiera monochromatyczny AP_k.

Twierdzenie 25 (Erdös 1947, Shearer, 1982) *(a) Jeśli* $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} < 1$ *to* $R(k) > n$.

(b) $R(k) > n - \binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}$.

Dowód: (a) Klasyczna metoda probabilistyczna oparta o Fakt 1 ...

(b) Fakt 2 plus metoda „usuwania” ... ■

Wniosek 3 (Erdös 1947, Shearer, 1982) *Przy* $k \to \infty$,

(a) $R(k) > \frac{1}{e\sqrt{2}}k2^{k/2}(1 - o(1))$.

(b) $R(k) > \frac{1}{e}k2^{k/2}(1 - o(1))$.

5.3.2 Lokalny Lemat Lovásza

Grafem zależności rodziny zdarzeń $A_1, \ldots, A_n$ nazywamy dowolny graf G o zbiorze wierzchołków $[n]$ i taki, że dla każdego i, zdarzenie A_i jest (łącznie) niezależne od rodziny zdarzeń $\{A_j : j \neq i, ij \notin E(G)\}$.

Twierdzenie 26 (Lokalny Lemat Lovásza, Erdös-Lovász 1975) *Niech G będzie grafem zalezności rodziny zdarzeń $A_1, \ldots, A_n$. Jeśli (i) $P(A_i) \leq p$, $i = 1, \ldots, n$, (ii) $\Delta(G) \leq d$, $d > 0$, i (iii) $4dp \leq 1$, to $\bigcap_i \bar{A}_i \neq \emptyset$.*

Dowód: ... ■

Twierdzenie 27 (Spencer, 1975) $R(k) > \frac{\sqrt{2}}{e} k 2^{k/2}(1 - o(1))$

Zadanie Domowe 32 Zbadać niezależność zdarzeń A_S i A_T, gdy $|A_S \cap A_T| = 2$, zdefiniowanych w dowodzie tw. 27 i wyciągnąć wnioski.

Zadanie Domowe 33 Stosując twierdzenie 26, oszacować jak najlepiej z dołu liczbę Van der Waerdena $W(k)$. Wynik porównać z zadaniem 31.

5.4 Liczba $R(k, 3)$

Twierdzenie 28 (Erdős, 1961) *istnieje stała $c_1 > 0$ taka, że $R(k, 3) \geq c_1 \frac{k^2}{\log^2 k}$*

Lemat 5 *Istnieją stałe $c > 0$ i n_0 takie, że dla każdego $n \geq n_0$ istnieje graf o n wierzchołkach i $cn^{3/2}$ krawędziach i o następującej własności: w każdym podbiorze wierzchołków V mocy $c^{-2}n^{1/2} \log n$ istnieje krawędź nie należąca do żadnego trójkąta o trzecim wierzchołku poza V.*

Dowód: Tylko idea dowodu. ■
Dowód tw. 28: ... ■

Zadanie Domowe 34 Niech $p = c/\sqrt{n}$, a V będzie ustalonym podbiorem wierzchołków grafu losowego $G(n, p)$ o mocy $c^{-2}n^{1/2} \log n$. Obliczyć i porównać ze sobą wartości oczekiwane liczby krawędzi o obu koncach w V i liczby trójkątów o dokładnie jednym wierzchołku poza V. (Graf losowy $G(n, p)$ powstaje przez niezależny wybór każdej krawędzi z prawdopodobieństwem p.)

Twierdzenie 29 (Shearer, 1982) *$R(t,3) \le c_2 \frac{t-1}{f(t-1)} + 1$, gdzie $f(t) = \frac{t \log t - t + 1}{(t-1)^2}$, $f(0) = 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$.*

Wniosek 4 (Shearer, 1982) *Istnieje stała $c_2 > 0$ taka, że $R(k,3) \le c_2 \frac{k^2}{\log k}$*

Dowód: Dowód natychmiastowy. ∎

Zadanie Domowe 35 Pokazać, że

1. f jest ciągła
2. f jest malejąca
3. f jest wypukła
4. $1 - (t+1)f(t) + (t - t^2)f'(t) = 0$
5. dla wszystkich $0 < x_1 \neq x_2$ mamy $f(x_2) - f(x_1) > (x_2 - x_1)f'(x_1)$.

Lemat 6 *Dla każdego n-wierzchołkowego grafu bez trójkatów $\alpha(G) \ge f(d(G))n$, gdzie $d = 2|E_G|/n$.*

Dowód: ... ∎
Dowód twierdzenia 29: ... ∎

5.5 Liczba monochromatycznych obiektów

Twierdzenie 30 (Goodman, 1956) *W każdym kolorowaniu grafu pełnego K_n dwoma kolorami jest co najmniej $\frac{1}{24}n(n-1)(n-5)$ monochromatycznych trójkątów.*

Dowód: Niech f_G będzie liczbą trójek wierzchołków, które indukuja jedna lub dwie krawędzie i niech G bedzie grafem złożonym z krawędzi czerwonych. Zauważmy, że

$$2f_G = \sum_{v \in G} deg_G(v)\,(n - 1 - deg_G(v)) \le n \left(\frac{n-1}{2}\right)^2.$$

Stąd,

$$\binom{n}{3} - f_G \ge \frac{1}{24} n(n-1)(n-5).$$

∎

Uwaga 1 Niech t_n bedzie największą liczbą naturalną taką, że każde 2-kolorowanie $\binom{[n]}{2}$ zawiera co najmniej t_n monochromatycznych trójkątów. Z twierdzenia 30 i metody probabilistycznej wynika, że $t_n \sim n^3/24$.

Wniosek 5 *(a) W każdym kolorowaniu grafu pełnego K_6 dwoma kolorami są co najmniej dwa monochromatyczne trójkąty.*

(b) Suma trójkatów dowolnego grafu d-reguarnego i jego dopełnienia wynosi $\binom{n}{3} - \frac{1}{2}dn(n-1-d)$.

Zadanie Domowe 36 Stosując wniosek 5, obliczyć ile trójkątów ma graf krawędziowy do K_5? Cóż to jest za graf?

Niech s_n bedzie największą liczbą naturalną taką, że każde 2-kolorowanie $[n]$ zawiera co najmniej s_n monochromatycznych trójek Schura.

Zadanie Domowe 37 Pokazać, że
(a) liczba trójek Schura w $[n]$ wynosi $n^2/4 + O(n)$;
(b) $s_n \leq n^2/16 + O(n)$ (stosując MP);
(c) oszacowac s_n z dołu wykorzystując związki z trójkatami;
(d) oszacować s_n z góry (lepiej niż przez $n^2/16$), malując $[n]$ z fantazją.

6 Grafowa teoria Ramsey'a

Notacja $G \to (H_1, \ldots, H_r)^e$ lub $G \to (H)^e_r$, a , w wersji z kolorowaniem wierzchołków zamiast krawędzi, $G \to (H_1, \ldots, H_r)^v$ lub $G \to (H)^v_r$. Np. $K_6 \to (K_3)^e$ i $K_5 \to (K_3)^v$ (jak zwykle $r = 2$ opuszczamy w zapisie).

Zadanie Domowe 38 Pokazać, że $K_6 \to (C_4)^e$, gdzie C_4 to cykl długości cztery.

Problem Erdősa: Czy istnieje graf G taki, że $G \to (K_3)^e$ i $G \not\supseteq K_6$? Jesli tak, to znaleźć najmniejszy.

Odp. Grahama: $G = K_8 - C_5$.

Zadanie Domowe 39 Czy istnieje graf G taki, że $G \to (K_3)^v$ i $G \not\supseteq K_5$? Jeśli tak, to znaleźć najmniejszy.

Wersja indukowana: $G \xrightarrow{i} (H)^e_r$ i $G \xrightarrow{i} (H)^v_r$, gdzie monochromatyczna kopia musi być podgrafem indukowanym grafu G. Tutaj istnienie grafu G nie jest wnioskiem z tw. Ramseya.

Twierdzenie 31 (Nešetřil i Rödl, 1978) *Dla każdego grafu H i $r > 0$ istnieje G takie, że $G \xrightarrow{i} (H)^e_r$.*

Zadanie Domowe 40 Wywnioskować z tw. 31, że

(a) Dla wszytskich $r > 0$ i grafów $H_1, \ldots, H_r$ istnieje G takie, że $G \xrightarrow{i} (H_1, \ldots, H_r)^e$.

(b) Dla każdego *niedwudzielnego* grafu H i $r > 0$ istnieje G takie, że $G \xrightarrow{i} (H)^v_r$. (Wskaz.: najpierw rozważyć przypadek $r = 2$.)

Zadanie Domowe 41 Pokazać, że $K_{10} \to (2K_3)^e$.

Twierdzenie 32 (Chvatal 1977) $R(T_m.K_n) = (m-1)(n-1)+1$

Dowód: ... ■

Zadanie Domowe 42 (Burr 1974) Pokazać, że jeśli $m-1$ dzieli $n-1$, to $R(T_m.K_{1,n}) = m+n-1$

Twierdzenie 33 (Harary 1972)

$$R(K_{1,n}) = \begin{cases} 2n-1 & \textit{gdy } n \textit{ parzyste} \\ 2n & \textit{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Zadanie Domowe 43 Niech P_k bedzie ścieżką długości k.

(a) Wyznaczyć $R(P_2, P_3)$, $R(P_3)$ i $R(P_3, P_4)$.

(b) Rozstrzygnąć hipotezę, że $R(P_3, P_k) = k+2$ dla kazdego $k \geq 2$

Twierdzenie 34 (Erdős, Graham 1975) $R(T_m; k) \leq 2(m-2)k+1$

Dowód: ... ■

Zadanie Domowe 44 (Burr 1974) Pokazać, że $R(T_m; k) > (m-1)(k+1)/2$.

Twierdzenie 35 (Chung, Graham 1975) $R(C_4; k) \leq k^2+k+1$

Dowód: ... ■

Zadanie Domowe 45 $R(C_3, C_4) = ?$

Zadanie Domowe 46 Wyznaczyć $R_k(M_n^{(k)})$, gdzie $M_n^{(k)}$ jest k-jednostajnym skojarzeniem mocy n, tzn. zbiorem n rozłącznych hiperkrawędzi rzędu k.

6.1 Zastosowanie w teorii informacji

Alfabet T; graf pomyłek G; produkt G^k.

Cel: duży zbiór niezależny w G^k.

Twierdzenie 36 (Hedrlin, 1966) $\alpha(G \cdot H) \leq R(\alpha_G + 1, \alpha_H + 1) - 1$.

Dowód: ... (Roberts) ... ■

Na przykład, $\alpha(C_5^2) = 5$.

Shannon capacity: $c(G) = \lim_{k\to\infty}(\alpha(G^k))^{1/k}$ (zawsze istnieje).

Lovász 1979: $c(C_5) = \sqrt{5}$; $c(G) = \alpha(G)$ dla grafów doskonałych; $c(C_7) =$???

Bohman 2003: $c(C_{2k+1}) \sim k + 1/2$, gdy $k \to \infty$.

Zadanie Domowe 47 Znajdź $\alpha(C_4^2)$ oraz $c(C_4)$.

6.2 Relacje Ramseyowe

Mając dane dwa ciągi grafów, $\mathbf{G} = (G_1, \ldots, G_r)$ i $\mathbf{H} = (H_1, \ldots, H_s)$, piszemy $\mathbf{G} \to_e \mathbf{H}$, gdy dla każdego grafu F, jeśli $F \to_e (G_1, \ldots, G_r)$, to $F \to_e (H_1, \ldots, H_s)$, oraz $\mathbf{G} \to_v \mathbf{H}$, gdy malujemy wierzchołki. Jeśli coś jest prawdą w obu przypadkach, to będziemy opuszczać indeksy e i v.

Relacja $\mathbf{G} \to \mathbf{H}$ jest zwrotna i tranzytywna. Czy jest antysymetryczna?

Zadanie Domowe 48 Pokazać, że $(G) \to (H_1, \ldots, H_s) \Leftrightarrow G \to (H_1, \ldots, H_s)$.

Zatem notacja $\mathbf{G} \to \mathbf{H}$ jest uogólnieniem notacji $G \to (H_1, \ldots, H_s)$.

Jeśli istnieje uporządkowany podział indeksów $[s] = A_1 \cup \cdots \cup A_r$ taki, że dla każdego $i = 1, \ldots, r$, $G_i \to (H_j : j \in A_i)$ lub $A_i = \emptyset$ (własność (*)), to, oczywiście, $\mathbf{G} \to \mathbf{H}$.

W przypadku kolorowania wierzchołków, gdy $G_i = K_{a_i}$, $i = 1, \ldots, r$ a $H_j = K_{b_j}$, $j = 1, \ldots, s$, warunek (*) sprowadza się, poprzez zasadę szufladkową, do istnienia podziału $[s] = A_1 \cup \cdots \cup A_r$ takiego, że dla każdego i, $a_i \geq \sum_{j\in A_i}(b_j - 1) + 1$.

Kiedy zachodzi implikacja odwrotna? W transpozycji, czy jeśli (*) nie zachodzi, to $\mathbf{G} \not\to \mathbf{H}$?

Przykład: Niech $\mathbf{G} = (K_6, K_5)$ a $\mathbf{H} = (K_4, K_3, K_3, K_3)$. Wtedy $\mathbf{G} \to_v \mathbf{H}$, bo $K_6 \to_v (K_4, K_3)$ i $K_5 \to_v (K_3, K_3)$. Ale czy $(K_4, K_3, K_3, K_3) \not\to_v (K_6, K_5)$? To znaczy, czy istnieje graf F taki, że $F \to_v (K_4, K_3, K_3, K_3)$ ale $F \not\to_v (K_6, K_5)$?

Poniższe twierdzenie daje odpowiedź twierdzącą.

Twierdzenie 37 (Łuczak, Ruciński, Urbański, 2002) *Jeśli wszystkie grafy H_j, $j = 1, \ldots, s$, są 2-spójne lub K_2, to dla dowolnych $G_1, \ldots, G_r$, mamy*

$$\mathbf{G} \to_v \mathbf{H} \Leftrightarrow (*).$$

Bez 2-spójnosci to nie jest prawdą.

Zadanie Domowe 49 Niech $\mathbf{G}$ będzie ciągiem $r_1 + r_2 - 2$ grafów pełnych K_2, a $\mathbf{H}$ składa się z 2 dowolnych drzew o r_1 i r_2 wierzchołkach. Pokazać, że (*) nie zachodzi, ale $\mathbf{G} \to_v \mathbf{H}$.

Twierdzenie 37 implikuje antysymetrię relacji $\mathbf{G} \to_v \mathbf{H}$ w klasie grafów 2-spójnych i K_2. To znaczy, jeśli $\mathbf{G} \to_v \mathbf{H}$ i $\mathbf{H} \to_v \mathbf{G}$, to $\mathbf{G} = \mathbf{H}$ po ewentualnej permutacji grafów w jednym z ciągów.

Zadanie Domowe 50 Korzystając z twierdzenia 37, pokazać, że $\mathbf{G} \to_v \mathbf{H}$ jest antysymetryczna w klasie grafów pełnych.

W przypadku krawędziowym mamy tylko analogiczny wynik dla grafów pełnych.

Twierdzenie 38 (Graham, Łuczak, Rödl, Ruciński, 2002) *Jeśli wszystkie grafy G_i, $i = 1, \ldots, r$, oraz H_j, $j = 1, \ldots, s$, są pełne, to*

$$\mathbf{G} \to_e \mathbf{H} \Leftrightarrow (*).$$

Przykład: (Zamiast K_{a_i} piszemy a_i.) Na podstawie tw. 38 mamy $(3,3,3) \not\to_e (5,5)$ co nie jest wcale zaskakujące, bo przecież wiemy, że $17 \to (3,3,3)$ ale $17 \not\to (5,5)$. Jednak mamy też $(5,5) \not\to (3,3,3)$, co oznacza, że istnieje graf F taki, że $F \to (K_5, K_5)$, ale $F \not\to (K_3, K_3, K_3)$. Jak dotąd nikt takiego grafu nie widział.

Zadanie Domowe 51 (Może być trudne!) Korzystając z twierdzenia 38, pokazać, że $\mathbf{G} \to_e \mathbf{H}$ jest antysymetryczna w klasie grafów pełnych.

Antysymetria na pewno nie zachodzi dla gwiazd.

Zadanie Domowe 52 (Łatwe!) Pokazać, że $(S_7, S_7, S_7, S_7) \to_e (S_9, S_9, S_9)$ i odwrotnie też.

6.3 Gęstość Ramseya dla grafów pełnych

$$m(G) = \max_{F \subseteq G} \frac{|E(F)|}{|V(F)|}.$$

Definicja. Dla danego grafu H oraz liczby naturalnej $r \geq 2$ definiujemy *gęstość Ramseya* jako

$$m_{inf}(H, r) = \inf\{m(G) : G \to (H)_r\}$$

Zadanie Domowe 53 Jeśli $S_k = K_{1,k}$ jest gwiazdą k-ramienną, to

$$m_{inf}(S_k, r) = \frac{r(k-1)+1}{r(k-1)+2}.$$

Twierdzenie 39 (Kurek, 1997) *Dla każdego $k \geq 3$ i dla każdego $r \geq 2$*

$$m_{inf}(K_k, r) = \frac{R(k; r) - 1}{2}.$$

Dowód: Niech $R = R(k; r)$. Zauważmy, że $m(K_R) = \frac{R-1}{2}$. Zatem wystarczy pokazać, że

$$m(G) < \frac{R-1}{2} \Rightarrow G \not\to (K_k)_r.$$

$\chi(G)$ - liczba chromatyczna grafu G.

Fakt 3 *Jeśli $\chi(G) \leq R - 1$, to $G \not\to (K_k)_r$.*

Istotnie, podzielmy $V(G)$ na $R-1$ zbiorów niezależnych $V_1, \ldots, V_{R-1}$ i pokolorujmy wszystkie krawędzie pomiędzy V_i i V_j kolorem użytym aby pokolorować krawędź ij we właściwym (takim, w którym nie ma monochromatycznej kopii K_k) r-kolorowaniu grafu K_{R-1}.

Fakt 4 *Jeśli $m(G) < \frac{n-1}{2}$, to $\chi(G) \leq n - 1$.*

Istotnie, jeśli $m(G) < \frac{n-1}{2}$, to każdy podgraf F grafu G zawiera wierzchołek o stopniu co najwyżej $n-2$. Ustawiamy wierzchołki w rzędzie tak, aby każdy wierzchołek miał na lewo co najwyżej $n-2$ sąsiadów. Kolorujemy od lewej strony pierwszym wolnym kolorem. ∎

Wniosek 6 (Chvatál) . *Dla ustalonych $k \geq 3$ i $r \geq 2$ niech $R = R(k; r)$. Krawędziowa liczba Ramseya grafu pełnego K_k w odniesieniu do r kolor@ow wynosi $\binom{R}{2}$. Co więcej, jeśli graf Ramseya ma $\binom{R}{2}$ krawędzi, to składa się z kopii K_R i, byc może, izolowanych wierzchołków.*

Dowód: Jeśli graf spełnia jednocześnie $|E(G)| \leq \binom{R}{2}$ i $m(G) \geq \frac{R-1}{2}$, to musi zawierać podgraf izomorficzny do K_R. ■

Zadanie Domowe 54 $G \to (K_k)_r \Rightarrow \Delta(G) \geq R - 1$.

6.4 Gra Ramseya

Niech bedą dane dwie liczby naturalne $k, r \geq 2$. Mamy dwóch graczy, Konstruktora i Malarza. W każdym ruchu Konstruktor rysuje nowa krawędź, którą następnie maluje Malarz. Celem Konstruktora jest zmuszenie Malarza do narysowania monochromatycznej kopii K_k. Malarz chce tego uniknąć.

Liczba Ramseya on-line $\bar{R}(k; r)$ jest to najmniejsza liczba krawędzi jaką pomaluje Malarz, (minimum po wszystkich strategiach Konstruktora), zakładając, że Malarz gra optymalnie.

Twierdzenie 40 (Kurek, Ruciński) $\bar{R}(3; 2) = 8$

Dowód: Strategia Malarza: Malarz będzie musiał narysować monochromatyczny trójkąt wtedy i tylko wtedy gdy krawędź, którą musi pokolorować jest przekątna cyklu C_4, w którym dwie kolejne krawędzie są czerwone a dwie pozostaee niebieskie i obie z tych par monochromatycznych krawedzi tworza trójkat z ta przekatną. Tak pomalowaną kopie C_4 będziemy nazywali *śmiertelną*. Niepokolorowana krawedź nazwiemy *niebezpieczną* jesli należy do kopii C_4, w której dwie kolejne krawędzie są pokolorowane tym samym kolorem a pozostała krawędź jest innego koloru. Tak długo, jak tylko to możliwe, Malarz będzie probowac uniknąć śmiertelnego C_4, podobnie wierzchołka, ktory jest incydentny z trzema krawedziami tego samego koloru.

Dopóki nie więcej niz 5 wierzchołków jest wprowadzonych do gry przez Konstruktora, Malarz koloruje graf tak, aby uzyskać dwa monochromatyczne cykle C_5. W przeciwnym wypadku, jeśli krawędź e nie jest niebezpieczna, wtedy koloruje ją na czerwono chyba, że jest to krawędź incydentna z wierzchołkiem incydentnym do dwóch innych czerwonych krawędzi, lub stworzyłaby czerwony trójkąt. Jeśli e jest niebezpieczna, to koloruje ją tak, aby uniknąć śmiertelnej kopii C_4 chyba, że prowadziłoby to do monochromatycznego trójkąta.

Zobaczmy teraz, że jest to faktycznie zwycięska strategia. Jeśli po 6 ruchach co najwyżej 5 wierzchołków zostało wprowadzonych do gry, to 7. krawędź jest bezpieczna. Z drugiej strony 6 krawędzi nie może stworzyć 2 kopii C_4 na wiecej niż 5 wierzchołkach. Zatem rozpatrzmy przypadek, kiedy graf ma 6 krawędzi, co najmniej 6 wierzchołków i co najwyżej jedną kopię C_4. Twierdzimy, że Malarz może sprawić, aby ta kopia nie była śmiertelna. [...] ∎

Zadanie Domowe 55 Pograć sobie w C_4. Przeanalizować tę grę.

Zadanie Domowe 56 Obliczyć $\bar{R}(P_3)$ i $\bar{R}(P_4)$ (P_k – ścieżka długosci k). Rozważyć wariant tej gry z ograniczona planszą (do k wierzchołków, $k \geq 4$).

Pytanie Czy $\bar{R}(k;2) = o(R^2(k;2))$, przy $k \to \infty$?.

Twierdzenie 41 (Kurek, Ruciński) *Dla wszystkich liczb naturalnych $k, l \geq 2$ mamy*

$$\bar{R}(k,l) \leq (k+l)\binom{k+l-2}{l-1}.$$

W szczególności,
(i) $\bar{R}(k,k) \leq 2k\binom{2k-2}{k-1}$
(ii) $\bar{R}(k,l) = o(R^2(k,l))$ przy $k \to \infty$ gdzie $l \geq 3$ jest ustalone.

Dowód: Indukcja po $k+l$. ∎

6.5 Twierdzenie antyramseyowskie Kostoczki

Twierdzenie 42 (Kostoczka 1987) *Dla dowolnego 3-kolorowania krawedzi grafu pelnego K_n takiego, że każdy wierzchołek w każdym kolorze ma stopień co najmniej $n/4$, istnieje tęczowy (trójkolorowy) trójkąt.*

Dowód: Nazwijmy 3-kolorowanie złym jeśli nie zawiera różnokolorowego trójąta. Każde 3-kolorowanie można przedstawić w postaci 3 grafów G_1, G_2, G_3 o krawędziach poszczególnych kolorów. Najpierw pokażemy, że jeśli kolorowanie jest złe, to przynajmniej jeden z tych 3 grafów nie jest spójny.

Przypuśćmy, nie wprost, że G_1, G_2 i G_3 sa spójne. Zauważmy, że

Zadanie Domowe 57 Jeśli $V_1, V_2 \subset [n]$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $G_1[V_1]$ i $G_1[V_2]$ sa spójne i żadna para zbioru $A = \{\{x, y\}, x \in V_1, y \in V_2\}$ nie jest koloru 1, to wszystkie pary w A są tego samego koloru.

Niech V będzie najmniejszym takim zbiorem, że $G_1 - V$ jest niespójny i niech $S_1, \ldots, S_k, k \geq 2$ będą składowymi spójnosci grafu $G_1 - V$, tzn. maksymalnymi (w sensie zawierania) spójnymi podgrafami. Bedziemy utożsamiac $S_1, \ldots, S_k$ z ich zbiorami wierzchołków. Z minimalności V wynika, że dla każdej pary $x \in V$, $1 \leq i \leq k$, istnieje $y \in S_i$ taki, że krawędź xy jest koloru 1. Ponadto, ze spojności G_2, z V do $[n] - V$ musi biec krawedź koloru 2.

Oznaczmy przez x jej koniec w V i przyjmijmy, że jej drugi koniec leży w S_1. Z wyjsciowej obserwacji, dla kazdego i, $2 \leq i \leq k$, wszystkie krawędzie pomiędzy S_1 i S_i są tego samego koloru. Ponieważ x jest połączony kolorem 1 z pewnym wierzchołkiem w S_i, to musi to być kolor 2. Ponadto, argumentując podobnie, żadna krawędź pomiedzy S_1 i V nie jest koloru 3. Zatem G_3 jest niespójny - sprzeczność.

Można więc przyjąć, że G_1 jest niespójny. Czas wreszcie wykorzystać założenie o stopniach wierzchołków w G_1, G_2, G_3. Jego konsekwencją jest to, że G_1 ma co najwyżej 3 składowe. Wiemy też, że dla każdej pary składowych wszystkie krawędzie pomiędzy nimi są tego samego koloru. Jeśli są 2 składowe, to w mnieszej z nich dla każdego wierzchołka istnieje kolor, w którym stopień tego wierzchołka jest mniejszy od $\frac{n}{4}$. W przypadku 3 składowych szczegółowa analiza kilku podprzypadków prowadzi do tej samej konkluzji. ∎

7 Twierdzenie Szemerédiego o ciągach arytmetycznych

Dla dowolnego podzbioru A liczb naturalnych, niech

$$d(A) = \limsup_{n\to\infty} |A \cap [n]|/n.$$

Hipoteza 1 (Erdős, Turán, 1936) *Jeśli $d(A) > 0$, to A zawiera AP_k dla każdego k.*

Hipoteza ta implikuje tw. Van der Waerdena (tw. 9), i mówi, że przy dowolnym r-kolorowaniu liczb naturalnych „najliczniejszy" kolor zawiera AP_k dla każdego k.

Hipotezę udowodnili: Roth (1952) dla $k = 3$, Szemerédi (1969) dla $k = 4$ i (1974) dla dowolnego k. Poniżej podamy ideę dowódu Szemerédiego tw. Rotha.

Twierdzenie 43 (Roth, 1952) *Jeśli $d(A) > 0$, to A zawiera AP_3.*

Idea dowodu twierdzenia 43: Niech $S(n)$ bedzie mocą największego podzbioru $[n]$ bez AP_3. Tw. 43 jest równoważne równości $\limsup S(n) = 0$. Ale $S(n)$ jest funkcją subaddytywną, więc $c = \lim S(n)/n$ istnieje oraz $S(n)/n \geq c$ dla każdego n.

Zadanie Domowe 58 (a) $S(n)$ jest subaddytywna

(b)Dla każdej funkcji subaddytywnej $f(n)$, $c = \lim f(n)/n$ istnieje oraz $f(n)/n \geq c$ dla każdego n.

Przypuśćmy nie wprost, że $c = \lim S(n)/n > 0$. Niech A będzie najwiekszym podzbiorem $[n]$ bez AP_3. Zatem $|A| = S(n) \geq cn$. Pokażemy, że A zawiera specjalną strukturę arytmetyczną (k-kostkę), dzięki czemu będzie go można pokryć przy pomocy $o(n)$ ciągów arytmetycznych tej samej długości $O(\sqrt{n})$. Korzystając z addytywnej równowazności ciągów arytmetycznych z segmentami kolejnych liczb naturalnych, pokazemy w efekcie, że $|A| < cn$ – sprzeczność.

k-kostką nazywamy zbiór liczb naturalnych postaci $M(a, d_1, d_2, \ldots, d_k) = \left\{a + \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i d_i, \quad \epsilon_i \in \{0,1\}\right\}$. Można ją budować rekurencyjnie: $M_0 = \{a\}$, $M_i = M_{i-1} \cup (M_{i-1} + d_i)$, $i = 1, \ldots, k$.

Lemat 7 *Niech $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_{i+1} = \lceil \binom{\alpha_i}{2}/(n-1) \rceil$, $i = 0, 1, \ldots$. Jeśli $\alpha_k \geq 1$, to każdy zbiór $A \subset [n]$, $|A| \geq \alpha$, zawiera k-kostkę.*

Zadanie Domowe 59 Udowodnić lemat 7.

Uwaga: Jeśli $\alpha_i = 1$, to $\alpha_{i+1} = 0$, co usprawiedliwia użycie sufitu.

Wniosek 7 *Jeśli $|A| \sim cn$, to A zawiera k-kostkę dla $k = \log\log n + O(1)$.*

Dowód: ... ■

Hipoteza 2 (Erdős, \$ 3,000) *Jeśli $\sum_{a \in A} \frac{1}{a} = \infty$, to A zawiera AP_k dla każdego k.*

Zadanie Domowe 60 (ostatnie) Hipoteza 2 implikuje hipotezę 1.

Niedawno, Green i Tao udowodnili Hipotezę 2 w przypadku, gdy A jest zbiorem wszystkich liczb pierwszych.

8 Euklidesowa teoria Ramsey'a

Ustalmy skończony zbiór S w R^n. Własność $R(S, n, r)$ oznacza, że dla każdego $\chi : R^n \to [r]$ istnieje monochromatycznt zbiór T przystający do S.

Przykład: Niech S będzie zbiorem wierzchołków trójkata równobocznego o boku 1. Mamy $R(S, 4, 2)$, bo malując dwoma kolorami wszystkie 5 wierzchołków regularnego sympleksu w R^4 o boku długości 1, jakieś trzy będą tego samemgo koloru. Z drugiej strony, nie jest prawdą, że $R(S, 2, 2)$, bo kolorowanie płaszczyzny R^2 w biało-czerwone paski szerokości $\sqrt{3}/2$ nie zawiera monochromatycznego S.

Zadanie Domowe 61 *Niech Q bedzie zbiorem wierzchołków kwadratu o boku 1. Wtedy $R(Q, 6, 2)$.*

Mówimy, że S jest *ramseyowski*, gdy dla każdego r istnieje n takie, że $R(S, n, r)$. Na przykład, trójkąt równoboczny jest ramseyowski (spójrz na $2r$-wymiarowy regularny sympleks). Tym bardziej, każdy 2-elementowy zbiór S (odcinek) jest ramseyowski. Poniższe wyniki pochadzą z kilku prac Erdősa, Grahama, Montgomery'ego, Rothschilda, Spencera, Straussa, z lat 1970s.

Twierdzenie 44 *Jeśli S_1 i S_2 są ramseyowskie, to $S_1 \times S_2$ też.*

Wniosek 8 *Wszystkie prostopdałościany (=cegły) oraz ich podzbiory są ramseyowskie.*

Do połowy lat 80-tych nie znano innych zbiorów ramseowskich. Dopiero w 1986 Frankl i Rödl pokazali, że wszystkie trójkąty są ramseyowskie. Niech dane będą liczby naturalne $k < s$ oraz rzeczywiste $x_1, \ldots, x_k$. Zbiór S to zbiór punktów w R^s o k niezerowych współrzędnych, równych $x_1, \ldots, x_k$, w tej kolejności. Np., gdy $k = 2, s = 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, mamy trójkąt rozwartokątny (nie jest on podzbiorem cegły).

Fakt 5 *S jest ramseyowski.*

Dowód: ... ■

A czy istnieją zbiory nieramseyowskie? Tak, najprostszym jest zbiór 3 współliniowych punktów $L = \{0, 1, 2\}$

Fakt 6 *$R(L, n, 4)$ nie zachodzi dla żadnego n.*

Dowód: ... ■

Podobnie można pokazać, że każdy zbiór ramseyowski musi byc sferyczny, tzn. leżeć na jakiejś sferze.