Teoria Grafów 2

Zestaw zadań nr 4

Termin realizacji: Wtorek, 17 marca – pierwsza 10-tka, Piątek, 20 marca – reszta

1. Udowodnić, że jeśli graf G można skonstruować zaczynając od cyklu i kolejno dodając H-ścieżki do aktualnego grafu H, to G jest 2-spójny.
2. Pokazać, że żaden graf nie ma więcej niż $\binom{n}{2}$ minimalnych cięć krawędziowych. Znaleźć grafy osiągające to oszacowanie.
3. Zbiór $U \subseteq V(G)$ nazywamy *dominującym*, gdy $V(G) = U \cup N_G(U)$. Mówimy, że dwupodział $V(G) = V_1 \cup V_2$ *rozdziela* zbiór U, gdy istnieją $v_1, v_2 \in U$ takie, że $v_i \in V_i$ dla $i = 1, 2$. Pokazać, że dla każdego zbioru dominującego U, każdy dwupodział $V(G) = V_1 \cup V_2$, gdzie $V_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$, i $e(V_1, V_2) < \delta_G$, rozdziela U.
4. Wywnioskować Tw. Königa z Tw. Mengera.
5. Zbiór $a - B$ ścieżek nazywamy wachlarzem (fan) jeśli każde dwie z nich mają tylko 1 wspólny wierzchołek (a). Udowodnić, że dla $B \subset V$ i $a \in V \setminus B$, minimalna liczba wierzchołków rozdzielających a od B i różnych od a jest równa maksymalnej mocy $a - B$ wachlarza.
6. Niech a i b będą różnymi wierzchołkami w G. Jeśli $ab \notin E$, to minimalna liczba wierzchołkow rozdzielajacych a od b, ale różnych od a i b, jest równa maksymalnej liczbie niezależnych $a - b$ ścieżek.
7. Niech a i b będą różnymi wierzchołkami w G. Minimalna liczba krawędzi rozdzielających a od b jest równa maksymalnej liczbie krawędziowo rozłącznych $a - b$ ścieżek.
8. G jest krawędziowo k-spojny wgdy zawiera k krawedziowo rozłącznych ścieżek pomiędzy każdą para różnych wierzcholków.
9. Jeśli G jest 2-spójny, $G \neq K^3$, to dla każdej krawędzi e, $G - e$ lub $G|e$ jest też 2-spójny.
10. Jeśli G jest 3-spójny, $xy \in E$, to $G|xy$ jest 3-spójny wgdy $G - \{x, y\}$ jest 2-spójny.
11. G jest 3-spójny i 3-regularny wgdy można go otrzymać z K^4 w wyniku ciągu operacji polegających na postawieniu po 1 nowym wierzchołku na dwóch krawędziach i połaczeniu nowych wierzchołków ze sobą.
12. Jeśli G jest k-spójny, $k \geq 2$ i $|G| \geq 2k$, to G zawiera cykl długości co najmniej $2k$.
13. Jeśli G jest k-spójny, $k \geq 2$, to każde k wierzchołków leży na cyklu.
14. Jeśli G jest spójny, k-regularny i 2-dzielny, to jest 2-spójny.
15. Graf skierowany jest *silnie spójny* jeśli dla każdej uporządkowanej pary wierzchołków (a, b) istnieje skierowana $a - b$ ścieżka. Jeśli można rozspójnić silnie spójny graf usuwając co najwyżej k krawędzi, to można go też rozspójnić odwracając kierunki co najwyżej k krawędzi.
16. Graf G można zorientować tak, by otrzymany graf skierowany był silnie spójny wgdy G jest krawędziowo 2-spójny.
17. Turniej jest silnie spójny wgdy jest hamiltonowski.
18. Dla $n \geq 3$, niech $G_n = K_n - \lfloor n/2 \rfloor K_2$, tzn. G_n jest otrzymany z grafu pełnego przez usunięcie największego skojarzenia. Obliczyć $\kappa(G_n)$.
19. plus zadania zaległe