TEORIA GRAFÓW 2 (2009)– ZESTAW ZADAŃ 1

February 24, 2009

Zadanie 1 *Udowodnić, że każdy k-regularny graf 2-dzielny ma skojarzenie doskonałe, a więc i 1-faktoryzację, tzn. rozkład zbioru krawędzi na k rozłącznych skojarzeń doskonałych.*

Zadanie 2 *Wykazać, że graf Petersena nie ma 1-faktoryzacji.*

Zadanie 3 *Udowodnić, że każdy $2k$-regularny graf posiada 2-faktoryzację.*

Zadanie 4 *Udowodnić, że jeśli w grafie 2-dzielnym G dla każdego $S \subseteq V_1$ mamy $|N(S)| \geq |S| - d$, to G ma skojarzenie nasycające wszystkie oprócz co najwyżej d wierzchołków zbioru V_1.*

Zadanie 5 *Dla dowolnej liczby naturalnej k, pokazać, że każde dwa podziały skończonego zbioru na podzbiory mocy k mają wspólny system różnych reprezentantów.*

Zadanie 6 *Każdy 3-regularny graf bez mostów ma 1-faktor. Uogólnić na dowolne $k \geq 3$ (k-regularność i brak cięć krawędziowych mocy $k-2$).*

Zadanie 7 *Pokazać, że*

$$\beta(G) \geq \frac{|E(G)|}{2\Delta(G) - 1}.$$

(Tutaj $\beta(G)$ – moc największego skojarzenia.)

Zadanie 8 *Niech M będzie skojarzeniem w G a $k \geq 1$. Jeśli w G nie ma ścieżek rozszerzających (”augmenting”) M długości nie większej niż $2k-1$, to*

$$|M| \geq \frac{k}{k+1}\beta(G).$$

Zadanie 9 *Udowodnić, że w dowolnym grafie $\gamma(G) \leq 2\beta(G)$, jak również $\gamma(G) = n - \alpha(G)$. (Tutaj $\beta(G)$ – moc największego skojarzenia, $\gamma(G)$ – moc najmniejszego pokrycia krawędzi wierzchołkami.)*

Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną grafów. *$\mathcal{F}$-pokryciem* grafu G nazywamy rozpięty podgraf grafu G, którego każda składowa jest izomorficzna z jakimś grafem z rodziny $\mathcal{F}$. Moc pokrycia mierzymy liczbą składowych.

Zadanie 10 *W każdym grafie G istnieje pokrycie co najwyżej $\alpha(G)$ ścieżkami. (Tutaj $\mathcal{F}$ jest rodziną wszystkich ścieżek.)*

Zadanie 11 *Niech $\mathcal{C} = \{K_1.K_2, C_3, C_4, ...\}$. W każdym grafie G istnieje $\mathcal{F}$-pokrycie mocy co najwyżej $\alpha(G)$.*

Zadanie 12 *Udowodnić, że w każdym zbiorze częściowo uporządkowanym P, minimalna liczba łańcuchów pokrywających P równa się maksymalnej mocy antyłańcucha. [Tw. Dilwortha]*

Zadanie 13 *Wywnioskować Tw. Halla z Tw. Gallai'a-Milgrama*

Zadanie 14 *Wywnioskować z Tw. Gallai'a-Milgrama, że każdy turniej posiada ścieżkę Hamiltona.*

Zadanie 15 *Wywnioskować Tw. Königa z Tw. Dilwortha.*

Zadanie 16 *Pokazać, że każdy graf zawiera cykl długości większej niż $\delta(G)$ (o ile $\delta(G) \geq 2$).*

Zadanie 17 *Jeśli G jest spójny, to każde dwie najdłuższe ścieżki mają wspólny wierzchołek.*

Zadanie 18 *Jeśli spójny graf ma co najmniej $2k+1$ wierzchołków i minimalny stopień co najmniej k ($k \geq 1$), to zawiera ścieżkę długości $2k$.*

Zadanie 19 *Pokazać, że jeśli graf nie ma zbioru niezależnego mocy 3 to ma cykl długości co najmniej* $n/2$*, gdzie* $n \geq 5$ *jest liczbą wierzchołków.*

Zadanie 20 *Udowodnić, że dla grafów spójnych*

$$diam(G) < \frac{3|V(G)|}{\delta(G)}.$$

(Tutaj $diam(G)$ *oznacza średnicę grafu, to znaczy maksymalną odległość wierzchołków, a ta z kolei, to długość najkrótszej ścieżki.)*

Zadanie 21 *Jeśli* $\delta(G) \geq 3$*, to*

(i) G *zawiera parzysty cykl;*

(ii) największy wspólny dzielnik długości wszystkich cykli w G *jest nie większy niż 2.*