4 2-spójność, 3-spójność

Zacznijmy od pojęć podstawowych.

$A - B$ **ścieżka.** Niech $A, B \subseteq V(G)$. $A - B$ ścieżką nazywamy dowolną ścieżkę o początku w A i końcu w B, która nie zawiera żadnych innych wierzchołków z $A \cup B$.

H**-ścieżka.** Jeśli H jest podgrafem G, a $A = B = V(H)$, to $A - B$ ścieżkę nazywamy H-ścieżką.

Spójność. Graf G jest spójny, gdy każde dwa jego wierzchołki v, u są połączone ścieżką, tzn. istnieje $A - B$ scieżka, gdzie $A = \{u\}$ i $B = \{v\}$. Równoważnie, dla każdego podziału $V(G) = U \cup W$ istnieje krawędź o jednym końcu w U, a drugim w W.

Składowe spójności. Każdy maksymalny podgraf spójny grafu G nazywamy składową. Każdy wierzchołek należy do dokładnie jednej składowej.

Zbiór rozdzielający. Niech $A, B \subseteq V$, $X \subseteq V \cup E$. Mówimy, że X rozdziela A i B w G, jeśli każda $A - B$ ścieżka ma wspólny element z X. Mówimy, że X jest zbiorem rozdzielającym G (albo X rozdziela G), gdy X rozdziela w G jakieś dwa wierzchołki spoza X.

Cięcia. Gdy zbiór X rozdzielający graf G składa się tylko z wierzchołków (tylko z krawędzi) to nazywamy go też cięciem wierzchołkowym (krawędziowym).

k**-spójność.** Graf G jest k-spójny, gdy $|G| > k$ i G nie ma cięcia wierzchołkowego mocy mniejszej niż k. Największą liczbę naturalną k taką, że G jest k-spójny nazywamy stopniem spójności i oznaczamy przez $\kappa(G)$. Zatem graf jest k-spójny wgdy $\kappa \geq k$.

Krawędziowa k**-spójność.** Graf G jest k-krawędziowo-spójny, gdy $|G| > 1$ i G nie ma cięcia krawędziowego mocy mniejszej niż k. Największą liczbę naturalną k taką, że G jest k-krawędziowo-spójny nazywamy stopniem spójności krawędziowej i oznaczamy przez $\kappa'(G)$. Zatem graf jest k-krawędziowo-spójny wgdy $\kappa' \geq k$.

Dla każdegio grafu zachodzą nierówności:

$$\kappa \leq \kappa' \leq \delta$$

Wierzchołek cięcia. To wierzchołek rozdzielający dwa inne wierzchołki. Inaczej, 1-elementowe cięcie wierzchołkowe.

Most (krawędź cięcia). To krawędź rozdzielająca jej końce. Inaczej, 1-elementowe cięcie krawędziowe.

Fakt 4 (D 3.1.3) *G jest 2-spójny wgdy można go skonstruować zaczynając od cyklu i kolejno dodając H-ścieżki do aktualnego grafu H.*

Dowód: W jedną stronę jest to oczywiste. Podamy dowód w drugą. Jako graf 2-spójny, G ma $\delta(G) \geq 2$, więc zawiera cykl. Niech H będzie maksymalnym podgrafem grafu G konstruowalnym w sposób opisany w tekście Faktu 4. H musi być podgrafem indukowanym, bo każda krawędź $xy \in E(G) \setminus E(H)$, gdzie $x, y \in V(H)$, jest H-ścieżką. Przypuśćmy nie wprost, że $H \neq G$. Wtedy na podstawie spójności G, istnieje krawędź vw taka, że $v \in V(G) \setminus V(H)$ a $w \in V(H)$. Ale G jest 2-spójny, więc podgraf $G - w$ zawiera $v - V(H)$ ścieżkę P. Ta ścieżka, przedłużona o krawędź wv jest H-ścieżką – sprzeczność z maksymalnością wyboru podgrafu H. ■

Kontrakcja (ściągnięcie) krawędzi. To operacja polegająca na zastąpieniu krawędzi $e = xy$, jednym wierzchołkiem v_e i zachowaniu wszystkich krawędzi wychodzących z x lub y, nie wprowadzając przy tym pętli ani krawędzi wielokrotnych. Formalnie, nowy graf to $G|e = (V_e, E_e)$, gdzie

$$V_e = (V - \{x, y\}) \cup \{v_e\}$$

a

$$E_e = \{vw \in E : \{v, w\} \cap \{x, y\} = \emptyset\} \cup \{v_e w : xw \in E \text{ lub } yw \in E, \quad w \neq x, y\}.$$

Lemat 2 (D 3.2.1) *Jeśli G jest 3-spójny oraz $|G| > 4$, to G ma krawędź taką, że $G|e$ też jest 3-spójny.*

Dowód: Przypuśćmy nie wprost, że dla każdej krawędzi $xy \in E(G)$, graf $G|xy$ ma cięcie wierzchołkowe S, gdzie $|S| \leq 2$; co wiecej $v_{xy} \in S$ i $|S| = 2$. Niech $S = \{v_{xy}, z\}$. Wtedy $T = \{x, y, z\}$ jest minimalnym cięciem wierzchołkowym w G. Zatem, każdy wierzcholek z T ma sąsiada w każdej składowej C grafu $G - T$. Wybierzmy krawędź xy, trzeci wierzchołek z oraz składową C w ten sposób by $|C|$ była minimalna.

Niech v będzie sąsiadem z w C. Ponieważ $G|zv$ nie jest 3-spójny, to istnieje w taki, że $\{z, v, w\}$ jest minimalnym cięciem w G. Ponieważ $xy \in E(G)$, to jasne jest, że $G - \{z, v, w\}$ ma składową D taką, że $D \cap \{x, y\} = \emptyset$. Niech v' będzie sąsiadem v w D. Ponieważ v' jest różny od x, y, z, to musi należeć do C, a stąd $D \subseteq C$ (wyjaśnienie: każdy $v'' \in D$ jest połączony ścieżką z v – poprzez v' – która omija $\{x, y, z\}$; zatem v'' należy do tej samej składowej w $G - T$ co v, czyli do C.) Jednak $v \in C \setminus D$, więc $|D| < |C|$ – sprzeczność. ■

Twierdzenie 7 (Tutte, 1961 { D 3.2.2 }) *G jest 3-spójny wgdy istnieje ciąg*
$G_0 = K_4, G_1, ..., G_{n-1}, G_n = G$ *taki, że dla każdego* $i < n$ *istnieje w* G_{i+1} *krawędź* xy *spełniająca warunki:* $d(x), d(y) \geq 3$ *oraz* $G_i = G_{i+1}|xy$.

Dowód: Implikacja w jedną stronę wynika natychmiast z Lematu 2. W drugą stronę wystarczy pokazać, że jeśli G_i jest 3-spójny, to G_{i+1} też. Przypuśćmy nie wprost, że istnieje cięcie wierzchołkowe S w G_{i+1} mocy $|S| \leq 2$. Niech C_1, C_2 będą dwoma składowymi grafu $G_{i+1} - S$. Bez straty ogólności można przyjąć, że $\{x, y\} \cap V(C_1) = \emptyset$. Gdyby $V(C_2) \supseteq \{x, y\}$ lub gdyby istniał $v \in V(C_2)$, $v \neq x, y$, to graf $G_i = G_{i+1}|xy$ nie byłby 3-spójny. Zatem $V(C_2) = \{x\}$ lub $V(C_2) = \{y\}$, ale to przeczy założeniu, że $d(x), d(y) \geq 3$. ■

Wniosek 2 (Wheel Theorem, Tutte) *G jest 3-spójny wgdy istnieje ciąg* $G_0 = K_4, G_1, ..., G_{n-1}, G_n = G$ *taki, że dla każdego* $i < n$, G_{i+1} *powstaje z* G_i *poprzez rozszczepienie dowolnego wierzchołka* v *na dwa sąsiednie wierzchołki* v' *i* v'', *połączone dowolnie z sąsiadami* v, *ale tak by* $d(v'), d(v'') \geq 3$, *oraz by* $N_{G_{i+1}}(v') \cup N_{G_{i+1}}(v'') = N_{G_i}(v)$. ■