3 Pokrycie kontra pakowanie cykli

Tw. Königa mówi, że w każdym grafie i dla każdego k, albo istnieje k rozłacznych krawędzi, albo wszystkie krawędzie można pokryć mniej niż k wierzchołkami.

Jakie jeszcze grafy, oprócz K_2, mają podobną własność? Ogólniej, dla danej rodziny grafów $\mathcal{H}$, porównujemy dwa parametry grafowe:

- największą liczbę $k = k(G)$ rozłącznych wierzchołkowo kopii grafów z $\mathcal{H}$, które można znaleźć w G (tzw. $\mathcal{H}$-upakowanie)
- najmniejszą liczbę $s = s(G)$ wierzchołków, które pokrywają wszystkie podgrafy grafu G izomorficzne z tymi z rodziny $\mathcal{H}$ (tzw. $\mathcal{H}$-pokrycie).

Jeśli istnieje funkcja $f(k)$ taka, że dla każdego G

$$s(G) \leq f(k(G))$$

to mówimy, że rodzina $\mathcal{H}$ ma *własność Erdösa-Pósy.*

Tw. Königa mówi, że rodzina jednoelementowa $\mathcal{H} = \{K_2\}$ ma własność Erdősa-Pósy z $f(k) = k$. Pokażemy w tym rozdziale, że rodzina wszystkich cykli ma tę własność z $f(k)$ rzędu $k \log k$.

Twierdzenie 6 (Erdős-Pósa 1965) *Istnieje funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ taka, że dla każdego naturalnego k każdy graf G zawiera albo k wierzchołkowo rozłącznych cykli albo $f(k-1)$ wierzchołków pokrywających wszystkie cykle.*

Lemat 1 *Niech s_k będzie ciągiem takim, że $s_k = 1$ oraz*

$$s_k - 4 \log s_k \geq s_{k-1}.$$

Dla każdego $k \geq 1$, każdy 3-regularny multigraf H o co najmniej s_k wierzchołkach zawiera k wierzchołkowo rozłącznych cykli.

Powyższe waunki narzucone na ciąg s_k spełnia, między innymi, ciąg

$$s_k = 4k(logk + \log\log k + 4), \qquad k \geq 2.$$

(Szczegóły w podręczniku.)

Dowód Twierdzenia 6: Pokażemy to twierdzenie z $f(k) = k + s_{k+1}$, gdzie s_k jest takie jak w Lemacie 1. Możemy założyć, że G ma cykl, ale nie ma k rozłącznych cykli. Niech H będzie maksymalnym podgrafem z

$$2 \leq \delta(H) \leq \Delta(H) \leq 3.$$

Z maksymalności H wynika że

(i) każdy cykl w G przecina $V(H)$,

(ii) nie istnieje H-ścieżka o obu końcach stopnia 2 w $V(H)$.

Niech U będzie zbiorem wierzchołków stopnia 3 w H, a $W = V(H) \setminus U$. Z powyższych własności H wynika, że jeśli cykl C w G spełnia warunek $V(C) \cap U = \emptyset$, to $C \subseteq H$, tzn. C jest izolowanym cyklem w H (inaczej 2-regularna składową), lub $|V(C) \cap W| = 1$.

Niech $\mathcal{C}$ będzie rodziną cykli C w G takich, że

$$V(C) \cap U = \emptyset \quad \text{i} \quad |V(C) \cap W| = 1.$$

Niech $Z \subseteq W$ będzie zbiorem wierzchołków z W leżących na cyklach z $\mathcal{C}$. Dla każdego $z \in Z$ wybierzmy jeden cykl $C_z \in \mathcal{C}$ taki, że $z \in V(C_z)$ i oznaczmy $\mathcal{C}' = \{C_z : z \in Z\}$.

Z uwagi na maksymalność H (własność (ii)), cykle z rodziny $\mathcal{C}'$ są rozłączne (sprawdzić rysunkowo!). Niech $\mathcal{D}$ będzie rodziną izolowanych cykli w H, rozłącznych z Z. Rodzina $\mathcal{C}' \cup \mathcal{D}$ składa się z rozłącznych cykli, więc $|\mathcal{C}' \cup \mathcal{D}| \leq k-1$. Rozpatrzmy zbiór $X = Z \cup Y$, gdzie Y zawiera po 1 wierzchołku z każdego cyklu w $\mathcal{D}$. Mamy więc $|X| = |\mathcal{C}' \cup \mathcal{D}| \leq k-1$.

Zauważmy, że zbiór wierzchołków $X \cup U$ pokrywa wszystkie cykle w G. Trzeba jeszcze pokazać, że $|U| < s_k$. W tym celu stosujemy Lemat 1 do grafu H' otrzymanego z H przez zastąpienie wszystkich indukowanych ścieżek krawędziami (operacja odwrotna do brania topologicznego minora – nazwijmy ją *redukcją topologiczną*). Gdyby H' mial k rozłącznych cykli, to H też. ■

Dowód Lematu 1: Indukcja względem k (przypadek $k = 1$ wynika z jednego z zadań). Niech $k \geq 2$, a C będzie najkrótszym cyklem w H. Łatwo pokazać, że $|C| < 2log|H|$ (**Zadanie**).

Pokażemy, że podgraf indukowany $H - V(C)$, po redukcji topologicznej, jest 3-regularnym multigrafem o co najmniej

$$|H| - 2|C| > s_k - 4 \log s_k \geq s_{k-1}$$

wierzchołkach. Wtedy, na podstawie założenia indukcyjnego, będzie on mieć $k-1$ rozłącznych cykli, a więc $H - V(C)$ też będzie mieć $k-1$ rozłącznych cykli, które wraz z C utworzą k rozłącznych cykli w H.

W tym celu, tworzymy rekurencyjnie podział $V(H) = V_1 \cup V_2$. Początkowo $V_1 := V(C)$, a $e(V_1, V_2) := m \leq |C|$, gdzie $e(V_1, V_2)$ jest liczbą krawędzi między V_1 a V_2. Jeśli w $H[V_2]$ jest wierzchołek stopnia 0 lub 1, to przerzucamy go do V_1. W każdym kroku zmniejszamy $e(V_1, V_2)$. Ostatecznie, po $n \leq m$ krokach, mamy $e(V_1, V_2) \leq m - n$, i konsekwentnie w $H[V_2]$ jest co najwyżej $m - n$ wierzchołków stopnia 2 (bo każdy z nich jest incydentny z dokładnie jedną krawędzią o drugim końcu w V_1). Zatem podgraf $H[V_2] = H - V_1$, nie mając wcale stopni 0 i 1, redukuje się topologicznie do grafu 3-regularnego o co najmniej

$$|H| - |C| - n - (m - n) \geq |H| - 2|C|$$

wierzchołkach. ■