13 Zastosowania Lematu Szemerédiego

13.1 Twierdzenie Erdősa-Stone'a (Rozdziały 7.1 i 7.5 podręcznika)

Jednym z głównych zagadnień ekstremalnej teorii grafów jest wyznaczenie parametru

$$ex(n,H) = \max\{||G|| : |G| = n \text{ i } G \not\supseteq H\},$$

będącego maksymalną liczbą krawędzi w n-wierzchołkowym grafie G nie zawierającym żadnej kopii danego grafu H.

Graf Turána $T^{r-1}(n)$ to graf $(r-1)$-dzielny o $n \geq r-1$ wierzchołkach i maksymalnej liczbie krawędzie (oznaczanej $t_{r-1}(n)$). Moce jego klas podziału różnią się o co najwyżej 1.

Twierdzenie 26 (D 7.1.1, Turán, 1941) *Dla wszystkich liczb naturalnych r i n, $r > 1$, każdy graf bez K^r o n wierzchołkach i $ex(n, K^r)$ krawędziach jest (izomorficzny z) grafem Turána.*

Twierdzenie 27 (D 7.1.2, Erdős, Stone, 1946) *Dla wszystkich liczb naturalnych $r \geq 2$ i $s \geq 1$, i dla każdego $\epsilon > 0$, istnieje n_0 takie, że każdy graf o $n \geq n_0$ wierzchołkach i*

$$||G|| \geq t_{r-1}(n) + \epsilon n^2$$

krawędziach zawiera $K^r_s := K(\underbrace{s, s, \ldots, s}_{r})$ – r-dzielny graf pełny.

Z tego wynika ważny wniosek.

Wniosek 9 (D 7.1.3 Erdős, Simonovits, 1966)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ex(n,H)}{\binom{n}{2}} = \frac{\chi(H)-2}{\chi(H)-1}$$

Dowód: Niech $\chi(H) = r$. Wtedy dla każdego n, $H \not\subseteq T^{r-1}(n)$,a zatem $ex(n,H) \geq t_{r-1}(n)$. Z drugiej strony, dla dostatecznie duzych s, $H \subseteq K^r_s$, więc $ex(n,H) \leq ex(n,K^r_s)$. Na podstawie Tw. 27, dla każdego $\epsilon > 0$ i dostatecznie dużych n,

$$ex(n, K^r_s) \leq t_{r-1}(n) + \epsilon n^2.$$

Ostatecznie

$$t_{r-1}(n) \leq ex(n, K_s^r) \leq t_{r-1}(n) + \epsilon n^2$$

i dzieląc przez $\binom{n}{2}$ oraz przechodząc z $n \to \infty$, otrzymujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ex(n,H)}{\binom{n}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{t_{r-1}(n)}{\binom{n}{2}} = \frac{r-2}{r-1}.$$

■

(Niestety Wniosek 9 nie mówi wiele o grafach dwudzielnych.)

Def. grafu regularności: Dane są ϵ-regularny podział $\Pi := (V_0, \ldots, V_k)$ grafu G i liczba $d \in [0,1]$ (tzw. próg gęstości). Niech $R = R(\Pi, d)$ będzie grafem o zbiorze wierzchołków $\{v_1, \ldots, v_k\}$, w którym $v_i v_j$ jest krawędzią wgdy para (V_i, V_j) jest ϵ-regularna o gęstości $d_G(V_i, V_j) \geq d$.

Graf R_s powstaje przez powiększenia (blow-up) grafu R w skali s, tzn. każdy wierzchołek v_i grafu R zastępujemy zbiorem niezależnym U_i mocy s, a każdą krawędź – grafem pełnym 2-dzielnym $K_{s,s}$.

Lemat 13 (D 7.5.2 Lemat o zanurzaniu – ,,Weak Blow-up Lemma") *Dla każdego $d > 0$ i $\Delta \geq 1$ istnieje $\epsilon_0 > 0$ takie, że dla każdego grafu H, $\Delta(H) \leq \Delta$, dla każdego s i dla każdego grafu G wraz z ϵ-regularnym podziałem Π, $\epsilon \leq \epsilon_0$, w którym każdy zbiór poza śmietnikiem ma moc $l \geq s/\epsilon_0$, zachodzi implikacja:*

$$H \subseteq R_s(\Pi, d) \Longrightarrow H \subseteq G$$

Dowód: (Idea: sekwencyjne zanurzanie wierzchołków z troską o przyszłość.) Niech $H \subseteq R_s := R_s(\Pi, d)$. Uporządkujmy wierzchołki H dowolnie: $u_1, \ldots, u_h$, $h = |H|$. Dla każdego i, niech $j = \sigma(i)$ będzie takie, że $u_i \in U_j$. Chcemy zanurzyć H w G, tzn. przypisać każdemu $u_i \in V(H)$ pewien $v_i \in V_{\sigma(i)}$.

Niech $Y_i^0 = V_{\sigma(i)}$ będzie początkowym zbiorem kandydatów na v_i. Zbiory kandydatów będą modyfikowane w trakcie sekwencyjnego zanurzania: gdy jako obraz pewnego u_j wybierzemy v_j, to dla każdego $i > j$ takiego, że $u_j u_i \in H$, obetniemy Y_i^{j-1} do

$$Y_i^j := Y_i^{j-1} \cap N_G(v_j).$$

Ponieważ takich u_i jest co najwyżej Δ, v_j można wybrać tak, by wszystkie zbiory Y_i^j miały rozmiar co najmniej $(d-\epsilon)|Y_i^{j-1}|$. Rzeczywiście, z Zadania

107 wynika, że wierzchołków nie spełniających tego wymogu jest nie więcej niż $\Delta\epsilon l$, o ile

$$|Y_i^{j-1}| \geq \epsilon l.$$

Trzeba też pokazać, że wybór v_j jest możliwy, tzn., że

$$|Y_j^{j-1}| - \Delta\epsilon l \geq s$$

(bo, być może, obrazy $s-1$ innych wierzchołków z $U_{\sigma(j)}$ zostały już wybrane i to właśnie z Y_j^{j-1}).

Obie powyższe nierówności wynikają z nierówności

$$|Y_i^j| \geq (d-\epsilon_0)^{d_{ij}} l,$$

którą udowodnimy indukcją po j. Tutaj,

$$d_{ij} = |N_H(u_i) \cap \{u_1, \ldots, u_{j-1}\}|.$$

Dla $\epsilon_0 < \frac{1}{\Delta+1} d^\Delta$ mamy

$$|Y_i^{j-1}| \geq (d-\epsilon_0)^\Delta l \geq (\Delta+1)\epsilon_0 l$$

i Zadanie 107 można stosować, co w zasadzie kończy dowód. ■

Idea dowódu Twierdzenia 27: Stosujemy Lemat 9 z tak dobranymi parametrami, by graf regularności $R(\Pi, d)$ miał więcej niż

$$\frac{1}{2} k^2 \frac{r-2}{r-1} \geq t_{r-1}(n)$$

krawędzi, i na podstawie Tw. Turána zawierał graf pełny K^r. Wtedy też R_s zawiera K_s^r, i na podstawie Lematu 13, rownież G zawiera K_s^r. ■

13.2 Krawędziowe liczby Ramseya (Twierdzenie 9.2.2 w podręczniku)

Twierdzenie 28 (D 9.1.1 Ramsey, 1930)

Liczbą Ramseya $R(H)$ nazywamy najmniejszą liczbę naturalną N taką, że każde 2-kolorowanie krawędzi grafu pełnego K^N prowadzi do monochromatycznej kopii grafu H. Gdy $H = K^n$, to piszemy $R(n)$ zamiast $R(K^n)$. Na przykład $R(3) = 6$. Wiadomo, że dla $n > 3$, $R(n) > 2^n$. Jednak dla rzadkich grafów H (a takimi są grafy o ograniczonym maksymalnym stopniu) liczby Ramseya $R(H)$ rosną liniowo z $n = |H|$.

Twierdzenie 29 (D 9.2.2, Chvatál, Rödl, Trotter, Szemerédi, 1983) *Dla każdego $\Delta \geq 1$ istnieje $c > 0$ takie, że dla każdego grafu H o maksymaknym stopniu $\Delta(H) \leq \Delta$ mamy $R(H) \leq c|H|$.*

Dowód: Przyjmijmy $d = 1/2$. Niech $\epsilon_0 = \epsilon_0(d, \Delta)$ będzie jak w Lemacie 13. Ustalmy też $m = R(\Delta + 1)$ i wybierzmy $\epsilon \leq \epsilon_0$ tak, by

$$2\epsilon < \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \ .$$

Niech $M = M(\epsilon, m)$ będzie jak w Lemacie Szemerédiego 9.

Pokażemy prawdziwość twierdzenia dla $c = \frac{M}{\epsilon_0(1-\epsilon)}$. Niech $n = |H|$, $N = cn$ i niech $K^N = G \cup \bar{G}$ będzie 2-kolorowaniem grafu pełnego K^N, gdzie przez G oznaczamy graf złożony z czerwonych krawędzi (a przez $\bar{G}$ – z niebieskich).

Stosując Lemat 9 do G otrzymujemy ϵ-regularny podział $\Pi = \{V_0, V_1, ..., V_k\}$, gdzie $|V_0| < \epsilon N$, $|V_1| = ... = |V_k| = l$ i $m \leq k \leq M$. Zauważmy, że

$$l = \frac{N - |V_0|}{k} \geq \frac{n}{\epsilon_0} \ .$$

Oszacujmy od dołu liczbę krawędzi grafu regularności $R = R(\Pi, 0)$ reprezentującego pary ϵ-regularne podziału Π bez żadnych warunków na ich gęstość (stąd drugi parametr jest równy 0). Mamy

$$||R|| \geq \binom{k}{2} - \epsilon k^2 > \frac{m-2}{2(m-1)} k^2 \geq t_{m-1}(k) \ .$$

Zatem na podstawie tw. Turána $R \supset K^m$. Oznaczmy tę klikę przez K i pomalujmy jej krawędzie $\{i, j\}$ na dwa kolory: *różowy*, jeśli $d_G(V_i, V_j) \geq 1/2$ i *błękitny* w przeciwnym razie. Z definicji liczby Ramseya, tak pomalowany graf K zawiera klikę $K^{\Delta+1}$, której wszystkie krawędzie są w tym samym kolorze.

Ponieważ $\chi(H) \leq \Delta + 1$, to $H \subseteq K_n^{\Delta+1}$, gdzie $K_n^{\Delta+1}$ powstaje z $K^{\Delta+1}$ przez n-krotne rozdmuchanie. Zatem, jeśli tym kolorem jest różowy, to $H \subseteq R_n(\Pi, 1/2)$ i na podstawie Lematu 13 $H \subseteq G$. Jeśli natomiast tym kolorem jest błękitny, to to samo jest prawdą w stosunku do grafu $\bar{G}$. Korzystamy tu z Zadania 106. ■