8 Kryteria planarności

Graf planarny, to graf, który można narysować (umieścić, zanurzyć) na płaszczyźnie tak, by krawędzie nie przecinały się poza swoimi wierzchołkami. Należy odróżniać graf planarny (obiekt abstrakcyjny) od *grafu płaskiego* (konkretny rysunek grafu planarnego bez przecięć krawędzi).

8.1 Topologiczne kryterium planarności

Wiemy już, że ani K_5 ani $K_{3,3}$ nie jest planarny. Również żadna topologiczna klika TK_5 ani $TK_{3,3}$ nie jest planarna. Stąd żaden graf zawierający TK_5 lub $TK_{3,3}$ nie jest planarny. Kuratowski odwrócił tę implikację.

Twierdzenie 13 (Kuratowski 1930 D 4.4.6) *Graf jest planarny wgdy nie zawiera TK_5 ani $TK_{3,3}$.*

Najpierw pokażemy, że można się ograniczyć do zwykłych minorów. Dla danym grafw X i G, piszemy $G = MX$, gdy $V(G) = \bigcup_{x \in V(X)} V_x$, V_x są parami rozłączne, dla każdego $x \in V(X)$ indukowany podgraf $G[V_x]$ jest spójny i dla każdej pary $x, y \in V(X)$ istnieje krawędź pomiędzy V_x i V_y wgdy $xy \in E(X)$. Innymi słowy, X powstaje z G przez ściągnięcie zbiorów V_x i usunięcie krawędzi równoległych. Jeśli $G = MX$ i $G \subseteq Y$, to X nazywamy minorem grafu Y. Obie relacje, bycia minorem i topologicznym minorem (zdefiniowana w rozdziale 6), są częściowymi porządkami.

Lemat 5 (D 4.4.2) *Graf zawiera K_5 lub $K_{3,3}$ jako minor wgdy zawiera K_5 lub $K_{3,3}$ jako topologiczny minor.*

Dowód: Łatwo pokazać, że każdy TX jest również MX oraz, że przy $\Delta(X) \leq 3$, każdy MX zawiera TX (ćwiczenia). Zatem wystarczy pokazać, że każdy graf G zawierający MK_5 zawiera TK_5 lub $MK_{3,3}$.

Niech K będzie minimalnym podgrafem G, takim że $K = MK_5$. Wtedy, każdy z 5 zbiorów podziału, V_i, $i = 1, \ldots, 5$, indukuje drzewo T_i, a pomiędzy każda parą tych zbiorów jest dokładnie 1 krawędź. Rozszerzmy drzewa T_i do drzew T_i' poprzez dodanie 4 krawędzi łączących je w K z innymi zbiorami podziału.

Z minimalnosci K, drzewa T_i' mają dokładnie 4 wierzchołki wiszące (te należące do innych zbiorów). Jeśli dla każdego i, $T_i' = TK_{1,4}$, to $K = TK^5$. Jeśli, np. T_1' nie jest $TK_{1,4}$, to ma dokładnie 2 wierzchołki stopnia

3, powiedzmy a i b. Wtedy, dzielimy $V_1 = A \cup B$, gdzie $a \in A$, $b \in B$, i ściągamy zbiory $A, B, V_2, ..., V_5$, otrzymując $K_{3,3}$. ■

Zatem Tw. Kuratowskiego jest równoważne następującemu.

Twierdzenie 14 (Wagner 1937 D 4.4.6) *Graf jest planarny wgdy nie zawiera MK_5 ani $MK_{3,3}$.*

Udowodnimy je najpierw dla grafów 3-spójnych.

Lemat 6 (D 4.4.3) *Każdy 3-spójny graf G bez MK_5 ani $MK_{3,3}$ jest planarny.*

Dowód: Indukcja względem $|G|$. Dla $|G| = 4$ jest to prawda ($G = K_4$). Niech $|G| > 4$ i załóżmy Lemat jest prawdziwy dla mniejszych grafów. Z Lematu 2, G ma krawędź xy taką, że $G|xy$ jest 3-spójny. Oczywiście, $G|xy$ też nie ma MK_5 ani $MK_{3,3}$ (z przechodniości), więc z założenia ind. jest planarny. Niech $\tilde{G}$ będzie grafem płaskim izomorficznym z $G|xy$ (rysunkiem $G|xy$).

Niech f będzie ścianą $\tilde{G} - v_{xy}$ zawierającą v_{xy}, a C jej brzegiem. Ponieważ $\tilde{G} - v_{xy}$ jest 2-spójny, to C jest cyklem (ćw.). Niech $X = N_G(x) - \{x\}$ i $Y = N_G(y) - \{y\}$. Mamy $X \cup Y \subseteq V(C)$. Usuwając z $\tilde{G}$ krawędzie łączące v_{xy} z $Y \setminus X$, otrzymujemy rysunek $G - y$, gdzie v_{xy} jest obrazem x. Teraz dorysujemy tam y wraz z przyległymi krawędziami.

Ponumerujmy wierzchołki z X kolejno wzdłuż cyklu C: $x_1, \ldots, x_k$. Dzielą one C na ścieżki P_i, $i = 1, \ldots, k$, o końcach w x_i i x_{i+1}, gdzie $x_{k+1} = x_1$. Pokażemy, że $Y \subseteq V(P_i)$ dla pewnego i. Jeśli nie, to albo istnieją 4 różne wierzchołki $x', x'' \in X$ i $y', y'' \in Y$, ułożone na cyklu w kolejności x', y', x'', y'', albo $|X \cap Y| \geq 3$. Dodając x i y, w pierwszym przypadku otrzymalibyśmy $TK_{3,3}$ w G, w drugim – TK_5. Tak czy siak, sprzeczność.

Niech więc $Y \subseteq V(P_i)$. Wtedy jednak możemy umieścić y we wnętrzu ściany $\tilde{G}$ otoczonej cyklem $x - x_i - P_i - x_{i+1} - x$, otrzymując płaski rysunek grafu G. ■

Do pełnego dowodu Tw. Kuratowskiego/Wagnera wystarczy teraz następujący lemat.

Lemat 7 (D 4.4.5) *Jeśli $|G| \geq 4$ i G jest krawędziowo maksymalnym grafem bez TK_5 i $TK_{3,3}$, to G jest 3-spójny.* ■

I na koniec ważny wniosek.

Wniosek 8 (D 4.4.7) *Każdy krawędziowo maksymalny graf planarny (triangulacja) o co najmniej 4 wierzchołkach jest 3-spójny.*

8.2 Algebraiczne kryterium planarności

Przestrzenią krawędziową grafu G nazywamy przestrzeń liniową

$$\mathcal{E}(G) = \{f : E(G) \to \mathbb{F}_2\} = \{E \subseteq E(G)\}$$

nad ciałem $\mathbb{F}_2$. Standardową bazą jest tu rodzina pojedynczych krawędzi $\{\{e\} : e \in E(G)\}$.

Przestrzeń cykli $\mathcal{C}(G)$ to podprzestrzeń liniowa przestrzeni $\mathcal{E}(G)$ generowana przez cykle grafu G. Gdy G jest spójny, to wymiar przestrzeni $\mathcal{C}(G)$, zwany liczbą cyklomatyczną grafu G, wynosi $||G|| - |G| + 1$.

Cykl jest *nierozdzielający*, gdy jego zbiór *wierzchołków* nie rozdziela żadnej pary wierzchołków spoza tego cyklu.

Twierdzenie 15 (Tutte 1963, D 3.2.3) *Dla 3-spójnego grafu* G*, przestrzeń* $\mathcal{C}(G)$ *jest generowana przez indukowane, nierozdzielające cykle.* ■

Fakt 7 (D 4.2.7) *Ściany 3-spójnego grafu płaskiego pokrywają się z jego indukowanymi, nierozdzielającymi cyklami.*

Dowód: Załóżmy, że G jest 3-spójny i płaski. Niech C będzie indukowanym i nierozdzielającym cyklem w G. Wtedy wszystkie wierzchołki nie leżące na nim są wewnatrz cyklu C albo wszystkie na zewnątrz, a to oznacza że C jest ścianą.

Niech teraz C będzie ścianą, a więc cyklem. Gdyby C miał cięciwę xy, to ścieżka łącząca w $G - \{x, y\}$ składowe grafu $C - \{x, y\}$ musiałaby przecinać tę cięciwę (istnienie takiej ścieżki wynika z 3-spójności grafu G). zatem C jest indukowanym cyklem. Dla dowolnych wierzchołków $x, y \notin V(C)$, na podstawie Globalnego Twierdzenia Mengera (Tw. 9) istnieją 3 niezależne xy-ścieżki, które dzielą płaszczyznę na 3 obszary. Z uwagi na planarność, cykl C musi się w całości zawierać w jednym takim obszarze, ale to oznacza, że jedna z tych 3 ścieżek omija go zupełnie, więc C nie rozdziela x i y. ■

Następne twierdzenie łączy w sobie topologiczne (planarność) i algebraiczne (przestrzeń cykli) aspekty teorii grafów. Bazę przestrzeni $\mathcal{C}(G)$ nazywamy prostą, gdy każda krawędź grafu G należy do nie więcej niż dwóch elementów tej bazy.

Twierdzenie 16 (Maclane 1937, D 4.5.1) *G jest planarny wgdy $\mathcal{C}(G)$ ma bazę prostą.*

Dowód (Szkic): Załóżmy, że G jest 2-spójny i płaski. Stąd (ćw.) wszyskie ściany to cykle, i wszystkie skończone ściany tworzą bazę przestrzeni $\mathcal{C}(G)$ (ćw.). Ta baza jest, oczywiście, prosta.

Odwrotnie, niech $\{C_1, \ldots, C_k\}$ będzie prostą bazą $\mathcal{C}(G)$. Dla każdej krawędzi $e \in E(G)$, $\mathcal{C}(G - e)$ ma też bazę prostą (ćw.).

Stąd każdy podgraf rozpięty grafu G ma bazę prostą. Przypuśćmy, że G nie jest planarny. Wtedy, na podstawie Tw. Kuratowskiego, zawiera TK_5 lub $TK_{3,3}$. Jeśli $\mathcal{C}(G)$ nie ma bazy prostej, to $\mathcal{C}(TG)$ też jej nie ma (ćw.). Zatem wystarczy pokazać, że ani K_5 ani $K_{3,3}$ (ćw.) nie mają prostej bazy.

Przypuśćmy, że K_5 ma bazę prostą. Ponieważ wymiar przestrzeni $\mathcal{C}(K_5)$ wynosi 6, ta baza składa się z 6 elementów, powiedzmy, $\{C_1, \ldots, C_6\}$. Ponieważ żaden element bazy nie jest zbiorem pustym, to każdy z nich zawiera cykl, a więc ma co najmniej 3 krawędzie. Co więcej, suma $C_0 = C_1 + \cdots + C_6$ zawiera wyłącznie te krawędzie, które należą do tylko jednego elementu bazy. Ponadto, z definicji bazy, $C_0 \neq \emptyset$. Stąd

$$18 = 6 \times 3 \leq |C_1| + \cdots + |C_6| = 2||K_5|| - |C_0| \leq 2 \times 10 - 3 = 17$$

co jest sprzecznością. ■

Niespodziewanie, powyższa algebraiczna charakteryzacja planarności, w połączeniu z Twierdzeniem 15, dają interesujące i stosunkowo łatwe do sprawdzenia kryterium planarności dla grafów 3-spójnych.

Twierdzenie 17 (Tutte 1963, Kelmans 1978, D 4.5.2) *3-spójny graf G jest planarny wgdy każda krawędź należy do co najwyżej dwóch (a nawet dokładnie dwóch) indukowanych, nierozdzielających cykli.* ■