7 Drzewiastość i lesistość

Inna miara spójności: *drzewiastość* = maksymalna liczba krawędziowo rozłącznych rozpiętych drzew.

Kiedy istnieje k takich drzew w grafie?

Warunek konieczny: Dla każdego podziału V na r części, G ma co najmniej $(r-1)k$ krawędzi ,,pomiędzy".

Twierdzenie 11 (Tutte, 1961; Nash-Williams, 1961, {D 2.4.1}) *Multigraf G zawiera k rozłącznych rozpiętych drzew wgdy każdy podział Π zbioru V ma co najmniej $k(|\Pi|-1)$,,międzykrawędzi".*

Wniosek 7 *Jeśli G jest krawędziowo $2k$-spójny, to G ma k rozłącznych rozpiętych drzew.*

Dowód: Dla każdego podziału Π, na podstawie 2-spójności, mamy co najmniej $\frac{1}{2}|\Pi|2k > k(|\Pi|-1)$,,międzykrawędzi". ■

Definicja podziału grafu G na rozpięte podgrafy $G_1, ..., G_k$: $E(G) = E(G_1) \cup ... \cup E(G_k)$.

Drzewiastość grafu wiąże się z problemem: znaleźć podział grafu na jak najwięcej spójnych, rozłącznych, rozpiętych podgrafów (bo drzewa są minimalnymi spójnymi grafami).

Problem dualny: znaleźć podział grafu na jak najmniej acyklicznych podgrafów (bo drzewa są maksymalnymi acyklicznymi grafami).

Inaczej, przy danym k, które grafy można podzielić (rozłożyć) na nie więcej niż k lasów?

Komentarz: Spójność jest własnością rosnącą, a cykliczność – malejącą.

Warunek konieczny: Dla każdego $\emptyset \neq U \subseteq V$, zachodzi $||G[U]|| \leq k(|U|-1)$.

Twierdzenie 12 (Nash-Williams, 1964,{D 2.4.4}) *Multigraf G można podzieć na co najwyżej k lasów wgdy dla każdego $\emptyset \neq U \subseteq V$, zachodzi $||G[U]|| \leq k(|U|-1)$.*

Dowody obu powyższych twierdzeń (w wersji pochodzącej od Madera) opierają sie na tym samym lemacie.

Lemat 4 *Niech* $F_1^0, \ldots, F_k^0$ *będzie zbiorem* k *krawędziowo-rozłącznych lasów w grafie* G *o maksymalnej łącznej liczbie krawędzi* $\sum_{i=1}^k ||F_i^0||$ *i niech* $e^0 \in E(G) \setminus \bigcup_{i=1}^k E(F_i^0)$*. Wtedy istnieje* $U \subseteq V(G)$ *taki, że* $U \supset e^0$ *oraz, dla każdego* $i = 1, \ldots, k$*, indukowany podgraf* $F_i^0[U]$ *lasu* F_i^0 *jest spójny.*

Zanim podamy dowód lematu, pokażemy jak szybko wynikają z niego oba twierdzenia.

Dowód Twierdzenia 12: Przypuśćmy, że multigrafu G nie można podzielić na k lasów. Wtedy, jeśli $F_1^0, \ldots, F_k^0$ oraz e_0 i U są takie jak w Lemacie 4, to $||G[U]|| \geq k(|U| - 1) + 1$ – sprzeczność. ■

Dowód Twierdzenia 11: Pokażemy tylko nietrywialną implikacje. Jest to dowód indukcyjny względem $|G|$. Łatwo sprawdzić, że implikacja zachodzi dla multigrafów G o $|G| = 2$. Niech G będzie grafem o $|G| > 2$ i załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla wszystich grafów o liczbie wierzchołków mniejszej niż $|G|$.

Niech $F_1^0, \ldots, F_k^0$ będą jak w Lemacie 4. Jeśli wszystkie F_i^0 są drzewami, to koniec dowodu. W przeciwnym razie, $\sum_{i=1}^k ||F_i^0|| < k(|G| - 1)$, ale z założenia twierdzenia, biorąc podział zbioru $V(G)$ na jednoelementowe podzbiory, otrzymujemy $||G|| \geq k(|G| - 1)$. Zatem istnieje krawędź $e^0 \in E(G) \setminus \bigcup_{i=1}^k E(F_i^0)$.

Niech U będzie zbiorem jak w Lemacie 4. Ściągając go do jednego wierzchołka v_U otrzymujemy graf $G|U$. Każdy podział Π wierzchołków grafu $G|U$ indukuje podział Π' wierzchołków grafu G, na tę samą liczbę części i o tej samej liczbie ,,międzykrawędzi", których z założenia jest co najmniej $k(|G|-1)$. Ponieważ $|U| \geq 2$, mamy $|G|U| < |G|$ i na podstawie założenia indukcyjnego, $G|U$ ma k krawędziowo rozłącznych rozpiętych drzew $T_1, \ldots, T_k$. Zastępując w drzewie T_i wierzchołek v_U przez drzewo $F_i^0[U]$ otrzymujemy zbiór krawędziowo rozłącznych rozpiętych drzew w G. ■

Dowód Lematu 4:

Dla dowolnej k-tki lasów $F = (F_1, \ldots, F_k)$ niech $E(F) = \bigcup_{i=1}^k E(F_i)$. Zauważmy, że jeśli F jest k-tką lasów o maksymalnej wartości $|E(F)|$, to dla każdej krawędzi $e \in E(G) \setminus E(F)$ i dla każdego i, graf $F_i + e$ zawiera cykl C_e. Mówimy, że $F' = (F_1', \ldots, F_k')$ jest otrzymana z F poprzez zamianę e' na e w lesie F_i, jeśli $e' \in C_e$, $F_i' = F_i + e - e'$ oraz $F_j' = F_j$ dla wszystkich $j \neq i$. Zauważmy też, że składowa F_i zawierająca e' ma po zamianie ten sam zbiór wierzchołków. Zatem, dla każdej pary x, y należącej do tej samej składowej lasu F_i', jedyna xy-ścieżka w F_i' (oznaczenie $xF_i'y$) odpowiada wzajemnie jednoznacznie jedynej xy-ścieżce w F_i (oznaczenie xF_iy).

Niech $F^0 = (F_1^0, \ldots, F_k^0)$ będzie k-tką lasów grafu G jak w założeniach lematu. Niech, ponadto, $\mathcal{F}'$ będzie rodziną wszystkich k-tek lasów otrzymanych z F^0 w wyniku dowolnej serii zamian. Oznaczmy przez E^0 zbiór tych krawędzi grafu G, które są poza przynajmniej jedną k-tką z $\mathcal{F}'$, tj. $E^0 = \bigcup_{F \in \mathcal{F}'}(E(G) \setminus E(F))$. Niech $G^0 = G[E^0] = (V(G), E^0)$ będzie podgrafem G złożonym z krawędzi ze zbioru E^0. Weźmy $e^0 \in E(G) \setminus E(F^0)$. Ponieważ $F^0 \in \mathcal{F}'$, więc $e^0 \in E^0$. Niech C^0 będzie składową G^0 zawierającą e^0. Twierdzimy, że $U = V(C^0)$, tzn., że $F_i^0[U]$ jest spójny, $i = 1, \ldots, k$.

Fakt 6 *Niech k-tka lasów F' będzie otrzymana z F przez zamianę w lesie F_i. Jeśli $xF_i'y \subset C^0$, to $xF_iy \subset C^0$.*

Ten fakt pozwala szybko zakończyć dowód lematu. W celu wykazania spójności podgrafu $F_i^0[U]$ wystarczy pokazać, że dla każdej krawędzi $xy \in C^0$ mamy $xF_i^0y \in C^0$. Niech $e = xy \in C \subset E^0$. Istnieje liczba naturalna s oraz k-tki lasów $F^1, \ldots, F^s$ takie, że F^r jest otrzymana z F^{r-1} w wyniku zamiany w dowolnym lesie, $r = 1, \ldots, s$, oraz $e \in E(G) \setminus E(F^s)$. Niech F' będzie k-tką otrzymaną z F^s w wyniku dodania e do F_i^s. Krawędź e jest xy-ścieżką w $F_i' \cap C^0$, więc na podstawie Faktu 6, ścieżka $xF_i^sy \subset C^0$. Jeśli F^s otrzymano z F^{s-1} w wyniku zamiany w lesie F_j^s, $j \neq i$, to $xF_i^{s-1}y = xF_i^sy \subset C^0$. W przeciwnym razie, stosujemy ponownie Fakt 6, więc tak czy owak $xF_i^{s-1}y \subset C^0$. Powtarzając to samo rozumowanie jeszcze $s-1$ razy, w końcu osiągamy nasz cel: $xF_i^0y \subset C^0$. ■

Dowód Faktu 6: Niech $e = uw \in E(F_i') \setminus E(F)$. Bez straty ogólności można założyć, że $e \in xF_i'y$, bo w przeciwnym razie $xF_iy = xF_i'y$ i nie ma czego dowodzić. Wystarczy pokazać, że $vF_iw \in C^0$ bo wtedy $(xF_i'y - e) \cup vF_iw$ jest spójnym podgrafem $F_i \cap C^0$, który zawiera x, y a więc też xF_iy. Dowolną krawędź $e' \in vF_iw$ można zamienić na e, zatem $e' \in E^0$. Stąd, $vF_iw \subseteq G^0$, a ponieważ $v, w \in xF_i'y \subseteq C^0$, to co więcej $vF_iw \subseteq C^0$. ■

Najmniejsze k jak w Twierdzeniu 12 nosi nazwę *lesistości grafu* (ang. *arboricity*).