5 Twierdzenie Mengera

Twierdzenie 8 (Menger, 1927 {D 3.3.1.}) *Niech G będzie grafem i niech $A, B \subseteq V(G)$. Wtedy minimalna liczba wierzchołków rozdzielających A i B równa się maksymalnej liczbie rozłącznych $A - B$ ścieżek.*

Dowód: Zauważmy, że nierówność min $\geq$ max jest oczywista, bo dowolny zbiór rozdzielający musi zawierać po 1 wierzchołku z każdej ścieżki z dowolnej rodziny rozłącznych ścieżek. Niech $k = k(G, A, B)$ będzie minimalną liczbą wierzchołków rozdzielających A i B. Wystarczy pokazać, że G ma k rozłącznych $A - B$ ścieżek.

Stosujemy indukcję względem $||G|| = |E(G)|$. Jeśli G jest pusty, to $k = |A \cap B|$ i tyleż jest rozłącznych (trywialnych) $A - B$-ścieżek.

Niech teraz $e = xy \in E(G)$. Przypuśćmy, że w G nie ma k rozłącznych $A - B$-ścieżek. Pokażemy najpierw, że wtedy istnieje zbiór X rodzielający A i B taki, że $e \subseteq X$ i $|X| = k$.

Rozważmy graf $G|e$, a w nim zbiory A' i B', gdzie dla $C = A, B$, $C' = C$ gdy $C \cap e = \emptyset$ oraz $C' = C \setminus (C \cap e) \cup \{v_e\}$, gdy $C \cap e \neq \emptyset$. Skoro w G nie ma k rozłącznych $A - B$-ścieżek, to w $G|e$ nie ma k rozłącznych $A' - B'$-ścieżek.

Z założenia indukcyjnego, $G|e$ ma zbiór Y, który rozdziela A' i B' i ma moc $|Y| < k$. Jeśli $v_e \notin Y$, to Y rodziela A i B w G – sprzeczność. Zatem $v_e \in Y$, ale wtedy zbiór $X = Y \setminus \{v_e\} \cup e$ jest szukanym zbiorem rozdzielającym w G. Mamy $|X| \leq k$, więc na podstawie definicji k, $|X| = k$.

Teraz spójrzmy na graf $G - e$. Ponieważ $e \subseteq X$, każdy zbiór rozdzielający A i X w $G - e$ rozdziela również A i B w G, więc ma co najmniej k wierzchołków. Z założenia indukcyjnego, w $G - e$ jest więc k rozłącznych $A - X$ ścieżek, i podobnie, jest tam k rozłącznych $B - X$ ścieżek. Ponieważ X rozdziela A i B, te dwie rodziny ścieżek nie przecinają się poza X i na ich bazie można łatwo zbudować k rozłącznych $A - B$ ścieżek. (Logiczna struktura tego dowodu jest następująca: z koniunkcji $(p \wedge \neg q)$ wywnioskowaliśmy q, ale implikacja $(p \wedge \neg q) \Rightarrow q$ jest logicznie równoważna implikacji $p \Rightarrow q$, która była naszym celem.) ∎

Zbiór $a - B$ ścieżek nazywamy wachlarzem (fan) jeśli każde dwie z nich mają tylko 1 wspólny wierzchołek (a).

Wniosek 5 (D 3.3.4) *Dla $B \subset V$ i $a \in V \setminus B$, minimalna liczba wierzchołków rozdzielających a od B i różnych od a jest równa maksymalnej mocy $a - B$ wachlarza.*

Wniosek 6 (D 3.3.5) *Niech a i b będą różnymi wierzchołkami w G.*

(i) Jeśli $ab \notin E$, to minimalna liczba wierzchołków rozdzielających a od b, ale różnych od a i b, jest równa maksymalnej liczbie niezależnych $a - b$ ścieżek.

(ii) Minimalna liczba krawędzi rozdzielających a od b jest równa maksymalnej liczbie krawędziowo rozłącznych $a - b$ ścieżek.

Twierdzenie 9 (Globalne Tw. Mengera {D 3.3.6}) *(i) G jest k-spójny wgdy zawiera k niezależnych ścieżek pomiędzy każdą parą różnych wierzchołków;*

(ii) G jest krawędziowo k-spójny wgdy zawiera k krawędziowo rozłącznych ścieżek pomiędzy każdą parą różnych wierzchołków.

Dowód: (i) Jeśli G ma k niezależnych ścieżek pomiędzy ka2rdą parą wierzchołków, to $|G| > k$ i nie ma cięcia wierzchołkowego mocy mniejszej od k. Zatem G jest k-spójny.

Przypuśćmy, że k-spójny graf G ma dwa wierzchołki a, b nie połączone k niezależnymi ścieżkami. Na podstawie Wniosku 6, $ab \in E(G)$. W grafie $G' = G - ab$, są co najwyżej $k-2$ niezależne ścieżki pomiĘdzy a i b. Ponownie z Wniosku 6, a i b można rozdzielić w G' zbiorem X mocy $k - 2$. Ponieważ $|G| = |G'| > k$, istnieje $v \notin X \cup \{a, b\}$. Zbiór X musi rozdzielać w G' v od a lub b. Przyjmijmy, że X rodziela w G' v i a. Wtedy jednak zbiór $X \cup \{b\}$ mocy $k - 1$ rozdziela w G v i a – sprzeczność z k-spójnością G. ■