2 Pokrycia ścieżkowe grafów skierowanych

Przypomnijmy znane twierdzenie minimaksowe.

Twierdzenie 4 (König, 1931) *W grafie 2-dzielnym G, liczba krawędzi $\beta(G)$ w największym skojarzeniu jest równa liczbie wierzchołków $\gamma(G)$ w najmniejszym pokryciu krawędzi.*

Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną grafów. *$\mathcal{F}$-pokryciem* grafu G nazywamy rozpięty podgraf grafu G, którego każda składowa jest izomorficzna z jakimś grafem z rodziny $\mathcal{F}$. Moc pokrycia mierzymy liczbą składowych.

Jeśli $\mathcal{F} = \{K_1, K_2\}$, to interpretując skojarzenia jako pokrycia przy pomocy K_2 i K_1, wnioskujemy na podstawie Twierdzenia 4, że w grafach 2-dzielnych minimalne takie pokrycie ma moc $M + n - 2M = n - M = n - \gamma(G) = \alpha(G)$. (W dowolnym grafie tak być nie musi (np. K_3).)

Jeśli $\mathcal{F} = \{P_1, P_2, \dots\}$, to mamy pokrycia ścieżkami dowolnej długości, inaczej rozpięte podgrafy, których każda składowa jest ścieżką. Łatwo pokazać, że w każdym grafie G istnieje pokrycie co najwyżej $\alpha(G)$ ścieżkami.

Wersja skierowana pokryć ścieżkami jest trudniejsza. Tutaj $\mathcal{F}$ jest rodziną wszystkich ścieżek skierowanych. Jeśli graf skierowany G jest otrzymany z nieskierowanego grafu dwudzielnego poprzez orientację jego krawędzi, to ma on tylko ścieżki skierowane długości 0 lub 1, i ponownie Twierdzenie 4 implikuje, że istnieje pokrycie co najwyżej $\alpha(G)$ ścieżkami.

Twierdzenie 5 (Gallai, Milgram, 1960) *W każdym grafie skierowanym G istnieje pokrycie co najwyżej $\alpha(G)$ (skierowanymi) ścieżkami.*

Dowód: Dla dowolnego pokrycia $\mathcal{P}$ oznaczmy przez $ter(\mathcal{P})$ zbiór końców ścieżek z $\mathcal{P}$ i nazwijmy go *terminalem* pokrycia $\mathcal{P}$. Mówimy, że $\mathcal{P}$ jest minimalne, jeśli żaden podzbiór właściwy terminalu $ter(\mathcal{P})$ nie jest terminalem jakiegoś pokrycia grafu G.

Pokażemy przez indukcję względem $|G|$, że jeśli $\mathcal{P} = \{P^1, ..., P^m\}$ jest minimalne, to istnieje zbiór niezależny I taki, że $I \cap V(P^i) \neq \emptyset$, $i = 1, ..., m$. To, oczywiście, implikuje, że $m = |\mathcal{P}| \leq \alpha(G)$.

Dla $|G| = 1$ nie ma czego dowodzić. Weźmy dowolny graf skierowany G o $|G| \geq 2$ i jego minimalne pokrycie $\mathcal{P} = \{P^1, ..., P^m\}$. Jeśli $T = ter(\mathcal{P})$ jest zbiorem niezależnym, to koniec dowodu. W przeciwnym razie, bez straty ogólności, można przyjąć, że istnieje łuk z końca P^2 (v_2) do końca P^1 (v_1). Zauważmy, że

I. $P^1 \neq K_1$,
gdyż w przeciwnym razie $T - \{v_2\}$ byłby terminalem pokrycia otrzymanego przez dołączenie ścieżki P^2 do wierzchołka v_1. Niech v będzie poprzednikiem v_1 na ścieżce P^1.

Przyjrzyjmy się pokryciu $\mathcal{P}' = \{P^1 - v_1, P^2, ..., P^m\}$ grafu $G' = G - v_1$. Twierdzimy, że jest ono minimalne w G'. Przypuśćmy, nie wprost, że nie jest. Wtedy istnieje pokrycie $\mathcal{P}''$ grafu G' takie, że $ter(\mathcal{P}'') \subset ter(\mathcal{P}')$. Zauważmy, że

II. $v \notin ter(\mathcal{P}'')$,
gdyż w przeciwnym razie, przedłużając ścieżkę w $\mathcal{P}''$ kończącą się w v do v_1, otrzymalibyśmy pokrycie grafu G o terminalu ściśle zawartm w T - sprzeczność z minimalnością $\mathcal{P}$ w G. Podobnie, zakładając II, można pokazać, że

III. $v_2 \notin ter(\mathcal{P}'')$.
Stąd $|\mathcal{P}''| \leq |\mathcal{P}'| - 2 = |\mathcal{P}| - 2$ i pokrycie $\mathcal{P}''$ wzbogacone o ścieżkę 1-wierzchołkową $\{v_1\}$ jest pokryciem G o terminalu ściśle zawartym w T - sprzeczność z minimalnością $\mathcal{P}$ w G.

Zatem $\mathcal{P}'$ jest minimalne w G' i na podstawie założenia indukcyjnego istnieje zbiór niezależny I przecinający każdą ze ścieżek z $\mathcal{P}'$. Ten sam zbiór przecina każdą ze ścieżek z $\mathcal{P}$ i tym bardziej jest niezależny w G. ∎

Wniosek 3 (Tw. Dilwortha) *W każdym zbiorze częściowo uporządkowanym P, minimalna liczba łańcuchów pokrywających P równa się maksymalnej mocy antyłańcucha.*